

תרגיל קומבינטורי

1. בו זמנית, כל אחד מ- N חברים קיבל איזושהי בשורה מרתקת (הבשורות שונות). לאחר מכן הם מתחיל להתקשר לחבריו ולספר את מה שהוא שמע. כל שיחת טלפון נמשכת שעה, ובכל שיחה אפשרי להעביר אחד לשני את כל הבשורות שהם יודעים. תוך כמה שעות יתכן שכולם יקבלו את כל הבשורות? (השאלה הורכבה לפני שהיה אינטרנט ושיחות טלפון של יותר משני אנשים.)

2. ניצן רושם על הלוח שורה N ספרות. לאחר מכן בילבו מכסה שתי ספרות באמצעות מדבקות אטומות. לאחר מכן, נכנס לחדר גנדלף הקוסף (שאינו לו יכולת לגילימנציה ולא יכולת לראות דרך המדבקות) ומנחש מה רשום מאחורי כל מדבקה. עבור אילו ערכי N אפשרי שהקסם יעבוד תמיד?

3. בבית ספר לומדים N בנים ו- N בנות. כל בן מכיר K בנות, וכל בת מכירה K בנים (המספר K הוא זהה עבור בנים ובנות). לכל שתי בנות יש בדיוק C בנים שמוכרים לשתייהן. הראו שלכל שני בנים יש בדיוק C בנות שמוכרות לשניהם (נתון שהיכרות היא הדדית).

4. נתבונן בקווים שבורים במישור משובץ שמתחילים בנקודה $(0,0)$ עם קודקודים בנקודות שלמות, וכל קו הולך ימינה או כלפי מעלה. לכל קו כזה נתאים **תולעת**: הצורה שמורכבת מכל המשבצות שיש להן לפחות נקודה משותפת אחת עם הקו השבור. הראו שכמות התולעים שניתן לפרק לדומיננו בדיוק ב- n דרכים, כאשר n גדול מ-2, שווה בדיוק לכמות השלמים החיוביים שקטנים מ- n וזרים ל- n . (התולעים נחשבות לזהות, אם הן מורכבות מאותן המשבצות) הערה: דומיננו הוא מלבן 2×1 העשוי ממשבצות.

5. בקבוצה של 120 אנשים, מהו המספר המקסימלי של רביעייות שבתוכן יש בדיוק זוג אחד של חברים?

6. האם קיימים 100 מספרים טבעיים,

א. שלא עולים על 20,000, כך שכל סכומי הזוגות מתוכם שונים זה מזה?

ב. שלא עולים על 9,000,000, כך שכל סכומי השלושות מתוכם שונים זה מזה?

7. בהינתן תמורה $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, נגדיר:

$$A = \{i \mid i > f(i)\}$$

$$B = \{(i, j) \mid i < j \leq f(j) < f(i)\} \cup \{(i, j) \mid f(j) < f(i) < i < j\}$$

$$C = \{(i, j) \mid i < j \leq f(i) < f(j)\} \cup \{(i, j) \mid f(i) < f(j) < i < j\}$$

$$D = \{(i, j) \mid i < j \text{ \& } f(i) > f(j)\}$$

הראו כי $|A| + 2 \cdot |B| + |C| = |D|$.

בתאבון!