רציפות דיסקרטית

1. א. 30 נעליים עומדות בשורה (מתוכן 15 שמאליות ו-15 ימניות). הוכיחו שיש מתוכן רצף של 10 נעליים שבהן כמות הנעליים הימניות והנעליים השמאליות שווה.

ב. 30 נעליים אחרות מסודרות במעגל, ויש מתוכן מספר זוגי של נעליים שמאליות. הראו שאפשר לחלק את המעגל לשני חצאי מעגלים, כך שבשניהם יש את אותו מספר של נעליים שמאליות.

2. הוכיחו שקיים n טבעי, עבורו מבין המספרים $\{n,\ n+1,\ \dots\ ,\ n+999\}$ יש בדיוק 5 מספרים ראשוניים.

3. בחלק מהמשבצות של ריבוע 50×50 כתובים המספרים ±1, והערך המוחלט של סכום המספרים במשבצות לא עולה על 100. הוכיחו שיש בתוכו ריבוע 25×25 שהערך המוחלט של סכום המספרים שכתובים בו לא עולה על 25.

תחנות רוח

הערה: בתרגיל זה, כל הנקודות במצב כללי – אף שלוש לא על ישר אחד.

4. על המישור סימנו $2n$ נקודות כחולות ו-$2k$ נקודות אדומות. הוכיחו שאפשר להעביר ישר שבכל צד שלו תהיה אותה כמות (גדולה מ-0) של נקודות כחולות ושל נקודות אדומות.

5. מצולע בעל 101 צלעות חסום במעגל. מכל אחד מקודקודי המצולע מורידים אנך אל הישר שמכיל את הצלע הנגדית. הוכיחו כי אחד מהאנכים האלה חותך את הצלע עצמה (ולא את המשך הצלע).

6*. תהא S קבוצה סופית של נקודות במישור, בעלת שתי נקודות לפחות. **תחנת רוח** היא תהליך שמתחיל עם ישר ℓ שעובר דרך נקודה יחידה P מהקבוצה S. הישר מסתובב עם כיוון השעון מסביב לנקודה P, שתקרא **המיסב**, עד לרגע הראשון בו הישר מכיל נקודה נוספת של S. נקודה זו, שתקרא Q, הופכת להיות המיסב החדש, והישר ממשיך להסתובב עם כיוון השעון מסביב ל-Q, עד לרגע הבא בו הישר יכיל שתי נקודות של S. התהליך ימשך כך לנצח.

הוכיחו כי ניתן לבחור נקודה P מ-S וישר ℓ דרך P, כך שתחנת הרוח שתתקבל תשתמש בכל נקודה מ-S בתור מיסב אינסוף פעמים.

7. נתונות 2013 נקודות אדומות ו-2014 נקודות כחולות. הוכיחו שניתן לחלק אותן לשני חלקים על ידי ישר, שבצד אחד שלו יהיו 2014 נקודות, ומתוכן מספר הנקודות האדומות והכחולות יהיה שונה.

8. נתונות m נקודות לבנות, n נקודות שחורות וישר ℓ, שבצד אחד שלו נמצאות כל הנקודות הלבנות ובצדו השני כל השחורות. נתון מספר $m,n>k$. הוכיחו כי ניתן להעביר ישר שבצד אחד שלו יהיו בדיוק k נקודות מכל צבע.

9. קונפיגורציה של 4027 נקודות נקראת **קולומביאנית** אם היא מורכבת מ-2013 נקודות אדומות ו-2014 נקודות כחולות (במצב כללי). מעבירים מספר ישרים, אשר מחלקים את המישור למספר אזורים. אוסף של ישרים נקרא **טוב** עבור קונפיגורציה קולומביאנית מסוימת אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

- אף ישר אינו עובר דרך אף נקודה בקונפיגורציה;
- אף אזור אינו מכיל נקודות משני הצבעים.

מצא את הערך הקטן ביותר של k עבורו לכל קונפיגורציה קולומביאנית של 4027 נקודות, קיים אוסף טוב של k ישרים.

בתאבון!