

יש מקום?

1. כמה צלחות עגולות עם רדיוס 10 ניתן להניח ללא חפיפה על מגש עגול עם רדיוס 30?
2. נתון לוח 14×7 . כמה מלבנים 2×4 שמורכבים ממשבצות שלמות אפשר לצייר עליו, כך שהם לא יגעו זה בזה? (כלומר לא יהיו להם נקודות משותפות, אפילו לא צלעות או קודקודים).
3. על המעגל נצבעו בכחול מספר קשתות זרות שסכום האורך הזוויתי שלהם 299° . עבור איזה n גדול ביותר ניתן להבטיח כי ניתן לחסום במעגל מצולע משוכלל עם n קודקודים שכל קודקודיו כחולים.
4. סימה וזיו משחקים משחק: סימה מסמנת N נקודות שונות A_1, A_2, \dots, A_N , לאחר מכן זיו מנסה למצוא זווית $A_i A_j A_k$ שקטנה מ-10 מעלות. עבור אילו ערכי N זיו בהכרח יצליח לסמן זווית כזאת?
5. בעיגול שרדיוסו 16 סומנו 650 נקודות. האם ניתן לצבוע טבעת עם רדיוס פנימי 2 ורדיוס חיצוני 3 כך שבטבעת יהיו לפחות 10 נקודות מסומנות?
6. על דף נייר יש כתם ששטחו קטן מ-1. הראו שניתן להזיז אותו כך שהוא לא יכיל אף נקודה של שריג (עם קואורדנטות שלמות).
7. במישור 10 נקודות. תוכיחו שאפשר לכסות אותם באיחוד זר של מטבעות שקל.
8. במישור נמצאים N מעגלים עם רדיוס 1 מרכזיהם O_1, O_2, \dots, O_n , כך שאף ישר לא פוגש יותר משני מעגלים.
- א. הראו כי
$$\sum_{i < j} \frac{1}{O_i O_j} \leq \frac{n\pi}{4}$$
- ב. הראו כי
$$\sum_{i < j} \frac{1}{O_i O_j} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}$$
9. שחר רושם במחברת את כל החזקות של 2 החל מ- 2^1 ועד 2^{3000} , וגם את כל החזקות של 5 החל מ- 5^1 ועד 5^{3000} . הראו שארבע הספרות השמאליות של אחד המספרים שהוא רושם הן "1000".
10. הראו כי לכל α, β ממשי קיימים m, n, k שלמים, $0 < n \leq 10000$, כך ש-

$$\left(\alpha - \frac{m}{n}\right)^2 + \left(\beta - \frac{k}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{5000n^2}$$

בתאבון!