חמדנות!

Greed is Good!

1. הוכיחו כי לכל מספר שלם יש ייצוג יחיד בבסיס פאקטוריאלי כלומר לכל מספר שלם חיובי n קיימים שלמים ... $a_1, a_2,$ כך שלכל i מתקיים ש-$a_i \leq i$ ו-

$$n = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + \cdots$$

2. הוכיחו כי כל מספר רציונלי בין 0 ל-1 ניתן לייצג כסכום של שברים מיצריים שונים.

תזכורת: שבר מצרי הוא שבר מהצורה $\frac{1}{n}$ עבור n שלם חיובי.

3. יהי גרף שבו הדרגה המקסימלית היא d. הוכיחו כי ניתן צבוע את קודקודי הגרף ב-$d+1$ צבעים כך שלא יהיה זוג של קודקודים שכנים הצבועים באותו צבע.

4. יהי גרף עם n קודקודים ו-m קשתות. הוכיחו כי ניתן למצוא תת גרף לגרף הנתון כך שהדרגה של כל קודקוד היא לפחות $\frac{m}{n}$.

5. בשורה מונחים 100 מטבעות בשווי שונה. איילה וברווז משחקים משחק, כל אחד בתורו לוקח מטבע אחד מקצה השורה, איילה מתחילה. הוכיחו כי איילה יכולה להבטיח שבסוף המשחק סכום ערכי המטבעות שלה יהיה לפחות כסכום ערכי המטבעות של ברווז.

6. נתון n שלם חיובי ומספרים ממשיים $0 \leq a_1, a_2, a_3, \dots, a_m \leq 1$ שסכומם n.
מצאו את ה-k המינימלי עבורו בוודאות ניתן לחלק את המספרים ל-k קבוצות כך שהסכום בכל קבוצה לא יעלה על 1.

7. א. הוכיחו כי מכל קבוצה של n מספרים ממשיים ניתן לבחור תת קבוצה מגודל $\left\lfloor \sqrt{2n} + \frac{1}{2} \right\rfloor$ לפחות כך שאף שלושה מספרים מתת הקבוצה לא מהווים סדרה חשבונית.

ב. האם ניתן לבחור 1983 מספרים שלמים חיוביים הקטנים שווים ל-10^5 כך שאף שלושה מבניהם לא מהווים סדרה חשבונית?

8. בכיתה n ילדים שהולכים ל-n חוגים, לכל חוג הולכים שלושה ילדים. הוכיחו כי ניתן לשלוח לפחות $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ מהילדים לטיול כך שלא יהיה חוג שכל התלמידים ממנו יצאו לטיול.

9. תהי טבלה $n \times 2$, בכל משבצת של הטבלה רשום מספר חיובי. הסכום בכל עמודה של הטבלה שווה ל-1. הוכיחו כי ניתן לסמן מספר אחד מכל עמודה כך שהסכום של המספרים המסומנים בכל אחת מהשורות לא יעלה על $\frac{n+1}{4}$.

10. שלישיית מספרים שלמים חיוביים (x, y, z) המקיימים $x < y < z$ ו-$\{z-y, y-x\} = \{1776, 2001\}$ נקראת שלישייה היסטורית. הוכיחו כי ניתן לרשום את המספרים השלמים החיוביים כאיחוד זר של שלישיות היסטוריות.

בתאבון!