חמדנות!

Greed is Good!

1. א. הוכיחו כי מכל קבוצה של n מספרים ממשיים ניתן לבחור תת קבוצה מגודל $\left\lfloor \sqrt{2n} + \frac{1}{2} \right\rfloor$ לפחות כך שאף שלושה מספרים מתת הקבוצה לא מהווים סדרה חשבונית.

ב. האם ניתן לבחור 1983 מספרים שלמים חיוביים הקטנים שווים ל-10^5 כך שאף שלושה מבניהם לא מהווים סדרה חשבונית?

2. בכיתה n ילדים שהולכים ל-n חוגים, לכל חוג הולכים שלושה ילדים. הוכיחו כי ניתן לשלוח לפחות $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ מהילדים לטיול כך שלא יהיה חוג שכל התלמידים ממנו יצאו לטיול.

3. תהי טבלה $n \times 2$, בכל משבצת של הטבלה רשום מספר חיובי. הסכום בכל עמודה של הטבלה שווה ל-1. הוכיחו כי ניתן לסמן מספר אחד מכל עמודה כך שהסכום של המספרים המסומנים בשתי השורות לא יעלה על $\frac{n+1}{4}$.

4. אילו מספרים רציונליים ניתן להציג כסום של מספרים הופכיים של כמות סופית של מספרים משולשיים שונים?

5. תהי X תת קבוצה מגודל 101 של $S = \{1,2,\dots,10^6\}$. הוכיחו כי ניתן למצוא $t_1, t_2, \dots, t_{100} \in S$ כך שהקבוצות $X + t_1, X + t_2, \dots, X + t_{100}$ זרות בזוגות.

6. הוכיחו כי בכל גרף עם n קודקודים שבו הדרגה של כל קודקוד היא לפחות $\frac{n}{2}$ ניתן למצוא מעגל המילטון.

7. לכל שלם חיובי n בנק קייפטאון מנפיק מטבעות בשווי $\frac{1}{n}$. נתון אוסף סופי של מטבעות כאלו (לא בהכרח בעלי שווי שונה) עם ערך כולל שאינו עולה על $99 + \frac{1}{2}$. הוכיחו כי ניתן לחלק את האוסף ל-100 קבוצות כך שהערך הכולל של כל קבוצה הינו 1 לכל היותר.

8. בליגת כדורגל יש n צבעים מותרים לבגדים. לכל קבוצה יש לכל היותר t סטים של בגדים בצבעים שונים. אוסף של קבוצות נקרא *צביעה* אם כל קבוצה

יכולה לבחור צבע שלאף קבוצה אחרת באוסף אין סט בצבע הזה. מצאו את הגודל המרבי של אוסף צביעה שבהכרח ניתן למצוא בכל ליגה, התשובה תלוי ב-n, t.

9. נתונות n נקודות במישור. שתי נקודות נקראות מקושרות אם יש להן את אותה קואורדינטת x או אותה קואורדינטת y. הוכיחו כי ניתן לחלק את הנקודות במישור לקבוצות כך שבכל קבוצה כל הנקודות נמצאות על ישר אחד ויש לכל היותר $n^{\frac{3}{2}}$ זוגות (לא סדורים) של נקודות מקושרות מקבוצות שונות של החלוקה.

10. יהי גרף עם n קודקודים ו-E קשתות. יהי k מספר שלם המקיים $nk \leq 2E$. הוכיחו כי ניתן לבחור תת גרף מושרה של הגרף המכיל לפחות $\frac{kn^2}{2E+n}$ קודקודים ולא מכיל גרף מלא עם $k+1$ קודקודים.

11. קבוצה של ישרים במצב כללי מחלק את המישור לאזורים. הוכיחו כי לכל n גדול מספיק בכל קבוצה של n ישרים במצב כללי ניתן לצבוע לפחות $\sqrt{n}$ מהישרים בכחול כך שלאף אזור סופי לא תהיה שפה שכולה כחולה.

בתאבון!