

מי ילמד גרפים?

בתרגיל זה כל הגרפים פשוטים ולא מכוונים (אלא אם מצוין אחרת)

1. נתון גרף בו לכל קודקוד יש לפחות 3 שכנים. הוכיחו שיש בו מעגל שאורכו לא מתחלק ב-3.
2. כל זוג שחקנים מבין 2021 שחקני טניס שיחקו משחק, ואחד מהם ניצח את השני. הוכיחו שבדיוק אחד מהבאים נכון:
- ניתן להושיב את כל השחקנים במעגל כך שכל אחד ניצח את מי שמשמאלו.
- ניתן לחלק את השחקנים לקבוצות A ו-B, כך שכל שחקן מ-A ניצח כל שחקן מ-B.
3. נתון גרף על 6000 קודקודים. ידוע שלכל קבוצה של 3000 מהקודקודים, אם נמחק אותה מהגרף עדיין תישארנה לפחות 3000 קשתות. מהי הכמות המינימלית של קשתות שיכולה להיות בגרף המקורי?
4. נתון גרף על n קודקודים. בין כל שני קודקודים בגרף עובר בדיוק מסלול אחד באורך לכל היותר 2, ואין אף קודקוד שמחובר לכל האחרים. הוכיחו כי $n - 1$ הוא ריבוע שלם.
5. נתונים k, n שלמים חיוביים. נתון גרף קשיר G על n קודקודים שקשתותיו נצבעו ב- k צבעים. ידוע שלכל אחד מהצבעים, אם מוחקים את כל הקשתות בצבע זה מהגרף, הוא כבר לא יהיה קשיר.
א. הוכיחו כי $k < n$.
ב. הוכיחו שב- G יש לכל היותר $\binom{n}{2} - \binom{k}{2}$ קשתות.
6. נתונים $d \leq n$ שלמים חיוביים. לאיילה יש גרף סודי על n קודקודים. ברווז מנסה להבין האם הגרף קשיר או לא. לצורך כך, הוא יכול לבחור שני קודקודים ולשאול האם המרחק ביניהם הוא פחות מ- d , יותר מ- d או בדיוק d . הוכיחו שברווז יכול לגלות האם הגרף קשיר תוך לכל היותר $2n^2/d$ שאלות. (המרחק בין קודקודים הוא אורך המסלול הקצר ביותר ביניהם, או אינסוף אם אין מסלול כזה)
7. במישור עוברים m ישרים במצב כללי (אף שניים לא מקבילים, אף שלושה לא נפגשים בנקודה), המחלקים את המישור למספר אזורים. זוג אזורים נקראים סמוכים אם יש להם צלע משותפת. ידוע שאם מתחילים מאחד האזורים ועושים צעדים לאזור סמוך כל פעם, אפשר לעבור בכל האזורים בדיוק פעם אחת ולחזור להתחלה (כלומר יש מעגל המילטון). מצאו את כל הערכים האפשריים של m .
8. למסיבה הגיעו $n \geq 4$ זוגות נשואים. במהלך המסיבה התרחשו k ריקודים, שבכל אחד מהם השתתפו תת-קבוצה כלשהי של הנוכחים. ידוע שכל זוג נשואים לא היו ביחד באף ריקוד, וכל שניים שאינם נשואים היו ביחד בריקוד אחד בדיוק. הוכיחו כי $k \geq 2n$.
9. מי ילמד גרפים?

בתיאבון!