שברים

1. למספרים טבעיים זרים בזוגות a,b,c מתברר כי מספר $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}$ שלם. מה הוא יכול להיות?

2. א. האם קיימים מספרים טבעיים a,b,c שבין המספרים $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ ו- $\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$ יש בדיוק מספר שלם אחד.
ב. הוכיחו כי אם שני המספרים אלה שלמים אז $a=b=c$.

3. יש שש שברים מצומצמים. כל מונה וכל מכנה - מספר טבעי. סכום המונים שווה לסכום המכנים. האם בהכרח יש שני שברים עם חלק שלם או חלק שברי שווה?

4. על הלוח רשומים 100 שברים שהמונים שלהם הם מספרים מ-1 עד 100 באיזשהו סדר וגם המכנים הם מספרים מ-1 עד 100 באיזשהו סדר. מתברר שאם מחשבים את הסכום ומצמצמים את השבר שמתקבל, מקבלים שבר עם מכנה 2. הוכיחו כי ניתן להחליף בין שני מונים ולקבל בסכום שבר עם מחנה אי-זוגי.

5. האם קיימים 5781 שברים מצומצמים, שכל המכנים שלהם שונים בזוגות, כך שאם נחסיר בין שני שברים מהרשימה ונצמצם את השבר שנוצר, המכנה של השבר שהתקבל קטן יותר ממכנה של כל שבר מבין 5781 השברים שניתנו?

6. לכל $\{a_1,a_2,a_3,...,a_n\}$ שהיא תמורה של $\{1,2,3,...,n\}$, ניתן להתבונן בסכום מהסוג $\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+...+\frac{a_n}{n}$. הראו כי לכל n מספיק גדול אפשרי לקבל בצורה כזאת כל מספר טבעי מ- n עד $n+1000$.

7. האם קיימים a,b,c,d טבעיים עבורם:
$$\begin{cases}\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=1\\ \frac{a}{d}+\frac{c}{b}=5781\end{cases}.$$

8. המספר $p=3n+1$ הוא ראשוני. הראו כי בשבר $\frac{a}{b}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$ לאחר צמצום המונה מתחלק ב- p.

9. האם ניתן לבחור מהסדרה $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},...$ תת-סדרה שבה כל איבר הוא הפרש של שני האיברים הקודמים, על מנת
(א) שבסדרה יהיו 1000 איברים?
(ב) שהסדרה תהיה אינסופית?

10. נתבונן בשבר מצומצם $\frac{a_n}{b_n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$. הראו שקיימים אינסוף ערכי n כך ש-$b_{n+1}<b_n$.

11. מצאו את כל הסדרות החשבוניות העולות באורך סופי, בהן הסכום שווה ל-1 וכל איבר הוא מהצורה $\frac{1}{k}$ כאשר k מספר טבעי.

12. עבור אילו ערכי m קיימים מספרים טבעיים שונים $a_1,a_2,\ldots,a_m$ כך ש-a_k זר ל-k ומתקיים $\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\ldots+\frac{n}{a_n}=1$.

13. עבור איזשהם a,b,c טבעיים, המספר $N=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$ שלם. מצאו את כל הערכים האפשריים של N.

14. הוכח כי לכל זוג מספרים שלמים חיוביים n,k קיימים k מספרים שלמים חיוביים $m_1,m_2,\ldots,m_k$ (לא בהכרח שונים) כך שמתקיים $1+\frac{2^k-1}{n}=\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{m_k}\right)$.

בתאבון!