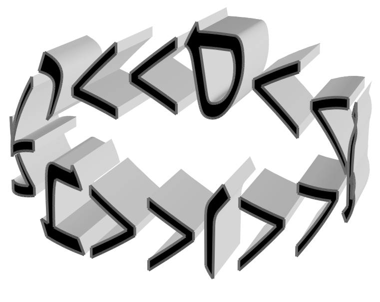

1. נתבונן בקבוצה $S=\left\{(a,b,c)\middle| a,b,c\in\mathbb{N},\ \ a|b|c,\ \ 1\le c\le 1000\right\}$.
האם $|S|$ מתחלק ב-3?

2. מספר חיובי שלם שקטן מ- 10^6 יקרא מוצלח, אם סכום ספרותיו מתחלק ב-13. הוכיחו כי סכום המספרים המוצלחים מתחלק ב-169.

3. נגדיר פונקצית מוביוס על מספרים טבעיים: $\mu(1)=1$, לכל מספר n שאינו חסר ריבועים מתקיים $\mu(n)=0$, ואם $p_1,\ldots,p_d$ מספרים ראשוניים שונים, אז $\mu(p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_d)=(-1)^d$. הראו כי $\sum_{k|n}a^k\mu\left(\frac{n}{k}\right)$ מתחלק ב- n, לכל a,n טבעיים.

4. נתון מספר ראשוני אי-זוגי p. קבוצת מספרים נקראת מוצלחת אם סכום האיברים בה מתחלק ב- p. כמה תתי-קבוצות מוצלחות בגודל k יש בקבוצה $\{1,2,3,\ldots,np\}$?

5. בוחרים באופן אקראי k מספרים שלמים מ-1 עד n שונים בזוגות, $a_1,a_2,\ldots,a_k$ (לכל קבוצה יש אותו סיכוי להיבחר). מצאו את התוחלת של מספר המינימלי בקבוצה.

6. מספרים טבעיים p ו- q הם זרים. דניאל רוצה לרשום בשורה $p+q$ מספרים, שמתוכם p פעמים את המספר q ועוד q פעמים את המספר $-p$, כך שהסכום של כל כמות של המספרים מתחילת השורה יהיה לא שלילי. בכמה דרכים הוא יכול לעשות זאת?

7. בשורה N מקומות חנייה. בכניסה כל רכב מקבל פתק עם מספר המקום שבו הוא אמור לחנות. המכונה שמחלקת פתקים מגרילה כל פעם מספר מ-1 עד N עם סיכויים שווים, בלי קשר לפתקים הקודמים (יתכן ששני רכבים יקבלו אותו מספר). כל רכב מגיע למקום המיועד לו לפי הפתק, ומנסה לחנות שם; אם המקום תפוס, אז הוא מתקדם למקום הבא ומנסה לחנות בו, וכך הלאה. אם רכב מסוים מגיע למקום N ולא מצליח לחנות שם, הוא יוצא מהחניון. מה הסיכוי לכך, ש-K רכבים יגיעו לחניון ריק וכולם יצליחו לחנות?

8. סדרת פיבונאצ'י מוגדרת באמצעות ערכי ההתחלה $F_0=0, F_1=1$ ונוסחת הנסיגה $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$. יהא p מספר ראשוני אי-זוגי,

א. הוכיחו כי $F_{p-1}+F_{p+1}-1$ מתחלק ב-p.

ב. הוכיחו כי לכל n חיובי שלם, $F_{p^{n+1}-1}+F_{p^{n+1}+1}-\left(F_{p^n-1}+F_{p^n+1}\right)$ מתחלק ב-p^{n+1}.

9. נתונה חפיסה רגילה של 52 קלפים (בחפיסה יש קלפים מ-4 צבעים, ובכל צבע יש קלפים שמייצגים 13 מספרים). נגיד שהחפיסה מסודרת נכון אם מתקיימים 3 תנאים:

כל שני קלפים צמודים הם בעלי אותו מספר או אותו צבע,

הקלף העליון והקלף התחתון גם הם בעלי אותו מספר או אותו צבע,

הצבע של הקלף העליון הוא תלתן, ומספר שרשום עליו הוא 1.

הוכיחו שכמות הדרכים לסדר את החפיסה נכון

א. מתחלקת ב- $12!$.

ב. מתחלקת ב- $13!$.

10. סדרה של פולינומים מוגדרת כך: $Q_0(x)=1$, $Q_1(x)=x$ ובנוסף לכל $n\geq 1$ מתקיים

$$Q_{n+1}(x)=xQ_n(x)+nQ_{n-1}(x).$$

הוכיחו כי לכל $p>2$ ראשוני ולכל x שלם $Q_p(x)-x^p$ מתחלק ב-p.

11. נתבונן בסדרה של פולינומים: $P_0(x)=1$, $P_1(x)=0$, וכל הפולינומים הבאים מוגדרים באמצעות סדרת נסיגה: $P_{n+1}(x)=nx\cdot P_{n-1}(x)+P_n'(x)$. עבור אילו מספרים ראשוניים q יש לפולינום $P_q(x)$ מקדם שלא מתחלק ב-q?

בתאבון!