חשבון זוויות

1. הוכיחו כי מפגש האלכסונים של טרפז נמצא על הציר הרדיקלי של שני המעגלים שקטריהם הם שוקי הטרפז (5.2.3).
2. M ו- N הם אמצעי האלכסונים של המרובע ההרמוני $ABCD$. הוכיחו כי המשיק ב- A למעגל החוסם של משולש AMN ושלושת הישרים האחרים שמוגדרים באופן דומה (על ידי B, C ו- D) נפגשים בנקודה.
   - תזכורת: $ABCD$ הוא מרובע הרמוני אם הוא חסום במעגל והמשיקים למעגל ב- A ו- C נפגשים על BD (מתברר שזה שקול לתנאי הסימטרי).
3. E ו- F הן נקודות על הצלעות AC ו- AB של משולש ABC בהתאמה. נסמן את נקודת המפגש של המעגל החוסם של משולש AEF עם המעגל החוסם של משולש ABC ב- Q. נסמן ב- S את החיתוך של הישר AQ עם הציר הרדיקלי של המעגלים עם קטרים EF ו- BC.
   א. הוכיחו כי המעגלים החוסמים של המשולשים AES ו- ABS חופפים.
   ב. הוכיחו כי אם EF משיק למעגל החסום במשולש (שמרכזו I), אזי $SI \perp AI$.

מעתה והלאה נתייחס לתמונה הבאה:

במרובע $ABCD$ הצעלות AB ו- CD נפגשות בנקודה E, והצלעות AD ו- BC נפגשות בנקודה F. קיבלנו צורה שנקראת "מרובע שלם", אשר קדקודיה הם $A, B, C, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F}$ וצלעותיה הן צלעות המרובע. את מרובע שלם זה נסמן ב- $ABCDEF$. למרובע שלם זה יש שלושה אלכסונים: AC, BD ו- EF.

4. נסמן את ההיטל של מפגש האלכסונים AC ו- BD על האלכסון EF ב- H_{EF}. באופן דומה נגדיר את H_{AC} ו- H_{BD}. בנוסף, נסמן את מפגש השיקופים של האלכסון EF ביחס לחוצי הזווית של המרובע השלם בקדקודים E ו- F ב- L_{EF}. באופן דומה נגדיר את L_{AC} ו- L_{BD}.
   א. הוכיחו כי L_{AC}, L_{BD} ו- L_{EF} נמצאים על ישר אחד.
   ב. הוכיחו כי H_{AC}, H_{BD} ו- L_{EF} נמצאים על ישר אחד.
   ג. הוכיחו כי H_{AC}, L_{BD} ו- L_{EF} נמצאים על מעגל עם נקודת מיקל של המרובע.
   ד. הוכיחו כי מעגל תשע הנקודות של המשולש שצלעותיו הן אלכסוני המרובע השלם עובר בנקודת מיקל של המרובע.
   - תזכורת: נקודת מיקל של מרובע היא מפגש המעגלים החוסמים של ארבעת המשולשים שצלעותיהם הן צלעות של המרובע.

5. אם נתון כי $AB = AD$, הוכיחו כי L_{BD} מהשאלה הקודמת נמצאת על הציר הרדיקלי של המעגלים החוסמים של המשולשים BCE ו- CDF.
6. נתון כי המרובע $ABCD$ חסום במעגל. הוכיחו כי $AL_{BD} = CL_{BD}$ (5.5.3).
7. נתון כי המרובע $ABCD$ חסום במעגל. X היא החיתוך של הישר הסימטרי לאלכסון EF ביחס לחוצה זווית E של המרובע והישר BCF. נסמן את המעגל העובר דרך C ו- X ומשיק ל- AX ב- ω_1, ואת המעגל העובר דרך C ו- F ומשיק ל- AF ב- ω_2. הוכיחו כי ω_1 ו- ω_2 נפגשים על EF.
8. נסמן את נקודת מיקל של המרובע ב- M. חוצי הזווית AMC חותכים את ישר גאוס של המרובע ב- X_1 ו- X_2. הנקודה $Я$ היא הנקודה במישור כך ש- $X_1MX_2Я$ מלבן. נסמן את החיתוך הנוסף של $ЯB$ עם המעגל שמרכזו M ועובר ב- B ב- B_1, ונגדיר באופן דומה את D_1. הוכיחו כי אמצע הקטע B_1D_1 נמצא על ישר גאוס של המרובע.
   - תזכורת: ישר גאוס של מרובע שלם הוא הישר העובר דרך אמצעי שלושת אלכסוניו.