

תרגיל אלגברי

1. מה יותר גדול: $\left\{ \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}}{0.4 \cdot \sqrt[3]{3} + 0.6 \cdot \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{0.288}} \right\}$ או $\left\{ \frac{5}{\sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{12}} \right\}$?

2. הוכיחו כי לכל m, n שלמים חיוביים מתקיים אי-השוויון: $\left| \frac{m}{n} - \sqrt{3} \right| \geq \frac{1}{(2 + \sqrt{3})n^2}$

3. הוכיחו כי בכל קבוצה של 2000 מספרים ממשיים שונים בזוגות ניתן למצוא שני זוגות

כך ש- $a > b$ ו- $c > d$, עבורם $a \neq c$ או $b \neq d$, המקיימים $\left| \frac{a-b}{c-d} - 1 \right| < \frac{1}{100000}$

4. נתון כי $\frac{m}{n} < \sqrt{23}$, כאשר m, n טבעיים. הוכח כי $\frac{m}{n} + \frac{3}{mn} < \sqrt{23}$

5. א. הראו שלכל n טבעי קיים שבר $\frac{a}{b}$ כאשר a ו- b שלמים ומתקיים כי

$$\sqrt{n} \leq \frac{a}{b} \leq \sqrt{n+1} \text{ וגם } 0 < b \leq \sqrt{n} + 1$$

ב. הראו שקיימים אינסוף ערכים של n טבעי כך שלא קיים שבר $\frac{a}{b}$ כאשר a ו- b שלמים שמקיימים כי

$$\sqrt{n} \leq \frac{a}{b} \leq \sqrt{n+1} \text{ וגם } 0 < b \leq \sqrt{n}$$

6. פתרו את מערכת המשוואות

$$\begin{cases} \frac{x - y \cdot \sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = a \\ \frac{y - x \cdot \sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = b \end{cases}$$

בהינתן a, b .

7. נגיד שפונקציה $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ היא מטפולינום אם ניתן להציג אותה בצורה

$$f(x_1, \dots, x_k) = \max_{i=1, \dots, m} \min_{j=1, \dots, n} P_{i,j}(x_1, \dots, x_k)$$

כאשר $P_{i,j}$ הם פולינומים ב- k משתנים. הראו כי מכפלה של שני מטפולינומים היא מטפולינום.

בתאבון!