

בדף הזה נדבר על סדרות נסיגה, המקיימות את תנאי נסיגה הבא:

$$x_{n+1} = 2Ax_n - x_{n-1} \quad (\text{כאן } A \text{ הוא פרמטר ממשי})$$

נסמן ב- t_n, h_n סדרות כלליות המקיימות את נוסחת הנסיגה, וב- s_n, c_n את סדרות המתחילות כך: $c_0 = 1, c_1 = A, s_0 = 0, s_1 = B$ כאשר $B^2 + A^2 = 1$.

(לפעמים סדרה s_n לא מוגדרת במספרים ממשיים)

1. לאילו מערכי A (ממשיים) הבאים סדרה t_n היא בהכרח מחזורית? לאילו מהערכים היא בהכרח לא מחזורית או שווה ל-0?

א. $A = 1$. י. $A = -1$. ב. $A = 0$. ג. $A = \frac{1}{2}$. ד. $A = 2$. ה. $A = \frac{\sqrt{2}}{2}$. ו. $A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ז. $A = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. ח. $A = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. ט. $A = \frac{1}{3}$

2. מצאו נוסחת נסיגה עבור t_n^2 .

3. א. הוכיחו כי אם $t_n^2 + h_n^2 = 1$ עבור $n = -1, 0, 1$ אז גם עבור כל n שלם.

ב. הוכיחו כי $s_n^2 + c_n^2 = 1$ לכל n .

4. א. הוכיחו כי אם $c_1 = A, c_0 = 1$ ממשיים, וגם $|A| \leq 1$ אז $|c_n| \leq 1$ לכל n .

ב. האם הטענה נכונה לכל t_n שמקיים $|t_0| \leq 1, |t_1| \leq 1, |A| \leq 1$?

5. הוכיחו את הנוסחאות הבאות:

א. $s_1 s_{m+n+1} = s_{m+1} s_{n+1} - s_n s_m$

ב. $s_k s_{m+n+k} = s_{m+k} s_{n+k} - s_m s_n$

ג. $s_{m+n} = s_n c_m + s_m c_n$

ד. $s_{2n} = 2s_n c_n$

ה. $c_{m+n} = c_m c_n - s_m s_n$

ו. $c_{2n} = c_n^2 - s_n^2$

ז. $s_1 t_{m+n+1} = s_{m+1} t_{n+1} - s_n t_m$

ח. $t_{n+m} + t_{n-m} = 2 \cdot c_m \cdot t_n$

ט. $s_{n+m} \cdot s_{n-m} = s_n^2 - s_m^2$

י. $t_{n+m} t_{n-m} - t_n^2 = t_m t_{-m} - t_0^2$

6. מצאו נוסחה סגורה עבור $t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n$.

7. חשבו את $c_0 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{4} + \frac{c_3}{8} + \dots$. התשובה יכולה להיות תלויה ב- A .

8. נתונה מערכת צירים, ומשושה משוכלל שמרכזו בראשית הצירים. נסמן את הקודקודים שלו ב- (x_n, y_n) כאשר $n = 0, 1, \dots, 5$. הוכיחו כי הסדרות x_n וגם y_n מקיימות את נוסחת הנסיגה $c_{n+1} = 2Ac_n - c_{n-1}$, ומצאו את A .

9. פתרו את שאלה 8 עבור מצולע משוכלל עם M צלעות, ומצאו את המשמעות הגיאומטרית של A . (לא צריך לחשב אותו)

10. הוכיחו כי סדרה $\cos(n\alpha + \beta)$ מקיימת את נוסחת הנסיגה, עם $A = \cos \alpha$.