

גיאומטריה

1. מהי הכמות המרבית של משבצות שניתן לסמן על לוח $n \times n$ כך שלא ייווצר מלבן לא מנוון (שלא מוכל בשורה או עמודה בודדת) שבו ארבעת הפינות מסומנות?
כאשר א. $n = 7$ ב. $n = 13$ ג. $n = 12$ ד. $n = 10$.

2. צבעו כל משבצת של לוח 9×12 באחד משלושה צבעים כך שלא ייווצר מלבן לא מנוון שכל פינותיו צבועות באותו צבע.

3. נתון מצולע משוכלל בעל 307 קודקודים. הוכיחו שניתן לסמן 18 קודקודים של המצולע כך שהמרחקים בין כל שתי נקודות מסומנות יהיו שונים זה מזה.

4. נתון גרף עם מספר צביעה 7. הוכיחו כי קיימים בגרף 7 מעגלים אי-זוגיים שכל שניים מבניהם זרים בקשתות.

5. האם קיים מצולע משוכלל S כך שלקבוצת הקודקודים של S יש תת-קבוצה $V \subset S$ כך שמתקיימים שני התנאים:

$$|V| \geq \frac{99}{100} |S| \quad (\text{א})$$

(ב) איחוד של כל 10 סיבובים של V אינו מכסה את S ?

6. נתונה קבוצה A בגודל 27. האם קיימת משפחה $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ של תתי-קבוצות של A כך שלכל שלישייה i, j, k של אינדקסים שונים בין 1 ל- n מתקיים: $A_k \not\subset A_i \cup A_j$. כאשר:

א. $n > 27$?

ב. $n > 100$?

ג. $n > 10000$?

7. א. הנמר והחמור משחקים על גרף מלא בעל 1864 קודקודים. החמור כותב על כל קשת ספרה מסוימת, לפי בחירתו. לאחר מכן, הנמר כותב על כל קודקוד ספרה מסוימת, לפי בחירתו. אם בסוף ניתן למצוא קשת שעליה ועל שני קודקודיה רשום אותו המספר, אז החמור מנצח.

מי ינצח, הנמר או החמור?

ב. אותה שאלה ל-149 קודקודים.

8. ריבוע לטיני הוא טבלה ריבועית בגודל $n \times n$ שבכל שורה וכל עמודה שלו כל אחד מהמספרים $1, 2, \dots, n$ רשום פעם אחת בדיוק. שני ריבועים לטיניים $(a_{i,j}), (b_{i,j}), 1 \leq i, j \leq n$ נקראים מאונכים אם כל n^2 הזוגות הסדורים $(a_{i,j}, b_{i,j})$ שונים זה מזה.

האם קיימים 10 ריבועים לטיניים מגודל 11 כך שכל שניים מבניהם מאונכים?

9. א. בגימנסיה לומדות 9 בנות. כל יום התלמידות הולכות לחדר האוכל כאשר הן מסודרות בשלשות. האם יתכן שמהלך 4 ימים אף שתי בנות לא היו ביחד בשלישייה יותר מפעם אחת?

ב. אותה השאלה עם 15 בנות ו-7 ימים. ג. 27 בנות ו-13 ימים. ד. 36 בנות ו-7 ימים.