

# פולינומים

כל הפולינומים הם עם מקדמים ממשיים אלא אם כן נאמר אחרת.

1. יהי  $P(x)$  פולינום. האם יתכן שמקדמים הפולינום  $Q(x) = P(x)(x-1)$  יהיו כולם חיוביים?
2. פולינום נקרא מגניב אם סכום המקדמים של דרגות זוגיות שווה לסכום המקדמים של דרגות אי-זוגיות. האם מכפלה של פולינום מגניב בפולינום אחר היא בהכרח פולינום מגניב?
3. נתון כי לפולינום  $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 1$  יש 5 שורשים ממשיים. כמה שורשים ממשיים יתכן שיהיו לפולינום  $Q(x) = x^5 + dx^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1$ ?
4. נתון הפולינום  $P(x) = x^{10} + a_9x^9 + a_8x^8 + \dots + a_1x + a_0$ , שמקדמיו ממשיים, וכל שורשיו שונים. האם ייתכן שיש לו בדיוק 5 שורשים ממשיים?
5. נתבונן בפולינום  $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0$  שמקדמיו מרוכבים ושורשיו הם  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . נתבונן גם בפולינום  $Q(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0$  ששורשיו הם  $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$ . נניח כי  $a_0 + a_2 + a_4 + \dots$  וגם  $a_1 + a_3 + a_5 + \dots$  ממשיים. הוכיחו כי  $b_0 + b_1 + b_2 + \dots$  גם הוא ממשי.
6. פרקו לגורמים את  $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 120$ .
7. מצאו את כל הפולינומים  $P$  המקיימים  $P(xy) = P(x)P(y)$ .
8. מצאו את כל הפולינומים  $P$  עבורם  $x \cdot P(x-1) = (x-7)P(x)$ .
9. מצאו את כל הפולינומים  $P$  המקיימים  $P(P(x)) + x = P(P(x) + x)$ .
10. (א) מהי שארית החלוקה שמתקבלת מהחלוקה של הפולינום  $x^{2021} - 1$  בפולינום  $x^{41} - 1$ ?  
(ב) מצאו את המחלק המשותף המקסימלי של  $10^{5781} - 1$  ושל  $10^{1968} - 1$ .
11. נתון פולינום מתוקן שמקדמיו שלמים. ידוע שכל שורשיו המרוכבים נמצאים בעיגול היחידה (כל המספרים עם ערך מוחלט שקטן מ-1). מה יכול להיות המקדם החופשי של הפולינום?
12. הוכיחו כי כל פולינום ממשי לא קבוע מתפרק למכפלה של פולינומים ממשיים ממעלות 1 ו-2.

13. אבי רושם על הלוח את המספרים  $0, 1, \dots, 5781$ . אם ישנו מספר שלם  $a$  ופולינום  $P(x)$  שכל המקדמים שלו כבר רשומים על הלוח, כך ש-  $P(a) = 0$ , אבי רושם גם את  $a$  על הלוח. אילו מספרים יכולים להיות כתובים על הלוח?

14. האם קיים פולינום  $P$  לא קבוע בעל מקדמים שלמים, כך ש-  $P(n)$  ראשוני לכל  $n$  טבעי?

15. נתון פולינום  $P$  לא קבוע עם מקדמים שלמים. מספר ראשוני  $q$  נקרא שמח אם קיים  $n$  עבורו  $q \mid P(n)$ . הראו שיש אינסוף ראשוניים שמחים.

16.  $P(x)$  הוא פולינום עם מקדמים שלמים. נתון שקיימים 3 מספרים שלמים **שונים**  $a, b, c$  כך ש-  $P(a) = P(b) = P(c) = 1$ . הוכח כי ל-  $P$  אין שורשים שלמים.

17. על הלוח כתובים מספר פולינומים ממעלה 37, שכל מקדמיהם אי-שליליים, והם מתוקנים. בכל שלב ניתן לבחור כל שני פולינומים רשומים  $f$  ו-  $g$  ולהחליפם בשני פולינומים מתוקנים ממעלה 37,  $f_1, g_1$ , המקיימים  $f_1 g_1 = fg$  או  $f_1 + g_1 = f + g$ . הוכיחו כי לא ייתכן שלאחר מספר סופי של מהלכים לכל הפולינומים על הלוח יהיו 37 שורשים חיוביים שונים.

18. אבי ובני משחקים במשחק הבא. ראשית, אבי מציא פולינום  $P(x)$  בעל מקדמים שלמים. לאחר מכן בני מבצע מספר מהלכים: בכל מהלך בני בוחר מספר שלם  $a$  שלא נבחר קודם, ואבי אומר בקול כמה פתרונות במספרים שלמים יש למשוואה  $P(x) = a$ . על כל מהלך בני משלם לאבי שקל אחד. בני מנצח כאשר אבי חוזר על מספר שאמר לפני כן, לא בהכרח ברצף. מה המספר המינימלי של שקלים שבני צריך כדי לנצח בוודאות?

19. מצא את כל הפולינומים  $P(x)$  עם מקדמים שלמים, כך שלכל שלם חיובי  $n$  מתקיים ש-  $P(n) \mid 3^n - 1$ .

20. בהנתן פולינום  $P(x)$ , נסמן  $\Delta P(x) = P(x+1) - P(x)$ . כמו כן, נגדיר באופן רקורסיבי:

$$\Delta^0 P(x) = P(x)$$

$$\Delta^{n+1} P(x) = \Delta(\Delta^n P(x))$$

הוכיחו כי קיים  $n$  כך ש-  $\Delta^n P(x) = 0$ . מהו ה-  $n$  המינימלי עבורו זה קורה?

21. תארו את כל הפולינומים ממעלה  $k$  שנתנים ערכים שלמים בנקודות שלמות עבור:

$$(א) k = 2$$

(ב)  $k$  כלשהו

22. במרחב תלת מימדי כל הנקודות מהצורה  $(a, b, c)$  עבור  $a, b, c = 0, 1, \dots, N$  נצבעו בכחול, חוץ מהנקודה  $(0, 0, 0)$  שנצבעה באדום. כמה מישורים נחוצים על מנת לכסות את כל הנקודות הכחולות, אם אסור לכסות את הנקודה האדומה?