תרגיל מספרים

1. יהא $p>3$ ראשוני, ונסמן $k=\left\lfloor\frac{2p}{3}\right\rfloor$. הוכיחו כי

$$p^2 \mid \binom{p}{1}+\binom{p}{2}+\cdots+\binom{p}{k}.$$

2. יהיו a,b שלמים חיוביים עבורם מתקיים $a!+b! \mid a!\,b!$. הוכיחו כי $3a\geq 2b+2$.

3. הוכיחו כי לכל a שלם חיובי קיימים שלמים חיוביים x,y עבורם

$$y^2=x^3+x+a^2.$$

4. מצאו את כל ה-nהשלמים החיוביים כך ש:

$$\left\lfloor\sqrt[4]{1}\right\rfloor+\left\lfloor\sqrt[4]{2}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\sqrt[4]{n}\right\rfloor=2n.$$

5. נתונים a,b זרים, הוכיחו שעבור אינסוף k המספר $ak+b$ מורכב מבדיוק 23 ראשוניים שונים.

6. נתון פולינום $W(x)=x^2+ax+b$ עם מקדמים שלמים והתכונה הבאה: עבור כל ראשוני p יש שלם k כך שגם $W(k)$ וגם $W(k+1)$ מתחלקים ב-p. הראו שיש שלם m כך ש-$W(m)=W(m+1)=0$.

7. הוכיחו שיש סדרה חשבונית באורך 2021 שכל איברה חזקות מושלמות, כלומר מהצורה a^b כאשר $a,b\in\mathbb{N}$, $b>1$.

8.א) הוכיחו שעבור אינסוף k כל המספרים $k2^n+1$ הם פריקים.

ב)אותו דבר עבור 2^n+k (k אי-זוגי).

9. קבוצה בגודל nשל מספרים מ- 1עד $2n$ נקראת שנוייה במחלוקת אם אין בה שני איברים המחלקים אחד את השני. הוכיחו שאיבר c נמצא בקבוצה שנוייה במחלוקות אם ורק אם: $c>n\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}$, כאשר k זה כמות הפעמים ש-2 מחלק את c.

בתאבון!