

תרגיל מספרים

1. יהיו x, y מספרים שלמים כך ש $x^2 - 4y + 1$ מתחלק ב $(x - 2y)(1 - 2y)$. הראו כי $|x - 2y|$ ריבוע שלם.
2. מצאו את כל המספרים הטבעיים n כך שלכל מספר טבעי a אשר זר ל $2n$ מתקיים $2n^2 | a^n - 1$.
3. נתונה קבוצה סופית P של מספרים ראשוניים. הוכיחו שקיים x כך שלכל p ראשוני מתקיים: קיימים a, b טבעיים כך ש $x = a^p + b^p$ אם ורק אם $p \in P$.
4. נתונים שני מספרים טבעיים m, n גדולים מ-1 כך ש $3^n - 1 | 2^m - 1$ הוכיחו כי n זוגי.
5. פולינום מתוקן p ממעלה 3 במקדמים שלמים נקרא מגניב אם המספרים היחידים עבורם $p(n)$ ריבוע שלם הם 2017, 2018, ו- $p(2017), p(2018)$ הם אכן ריבועים שלמים.
 - א. מצאו פולינום מגניב.
 - ב. מצאו את כל הערכים האפשריים של $p(2017) \cdot p(2018)$ כאשר p פולינום מגניב.
6. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, כך שלכל $x, y \in \mathbb{N}$ מתקיים:
 - א. $d(f(x)) = x$ כאשר $d(z)$ היא כמות המחלקים של המספר z .
 - ב. $f(xy) | (x - 1)y^{xy-1}f(x)$
7. הוכיחו כי לכל מספר טבעי n קיימת קבוצה S של מספרים שלמים בגודל n כך שלכל $a, b \in S$ המספרים היחידים מ S אשר $a - b$ מחלקם הם a, b .
8. יהי p מספר ראשוני מהצורה $p = 6k + 1$. האם ייתכן כי $\binom{3k}{k} \equiv 1 \pmod{p}$?