

## בניות בתורת המספרים

1. מצאו את המספר הטבעי הקטן ביותר  $n$  כך שקיימים מספרים שלמים  $1 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$  שעבורם  $\left(1 - \frac{1}{a_1}\right)\left(1 - \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{51}{2010}$ .
2. האם קיימת סדרה אינסופית  $\{a_n\}$  של טבעיים כך ש- $a_m, a_n$  זרים אם ורק אם  $|m - n| = 1$ ?
3. מספר טבעי  $n \geq 2$  ייקרא  $r$ -מגניב אם קיימת תמורה  $(a_1, \dots, a_n)$  של  $\{1, 2, \dots, n\}$  כך שלכל  $1 \leq i \leq n-1$ ,  $a_i a_{i+1} + 1$  חזקה מסדר  $r$  של מספר שלם.
  - א. הוכיחו כי קיימים אינסוף מספרים 2-מגניבים.
  - ב. הוכיחו כי לא קיימים מספרים 3-מגניבים.
4. לכל  $n$  טבעי נסמן ב- $d(n)$  את מספר המחלקים החיוביים של  $n$ . הוכיחו כי קיימים אינסוף מספרים טבעיים  $a$  כך ש- $d(an) \neq n$  לכל  $n$  טבעי.
5. הוכיחו כי קיימים אינסוף מספרים פריקים  $n$  כך ש- $n \mid 3^{n-1} - 2^{n-1}$ .
6. הראו כי קיימים אינסוף מספרים טבעיים  $n$  כך ש- $n$  מחלק את  $2^{2^n+1} + 1$  אבל לא את  $2^n + 1$ .
7. הוכיחו כי קיים מספר טבעי  $a$  כך שקיימים לפחות 2018 ערכים של  $n$  המקיימים  $\varphi(n) = a$ .
8. נתון מספר ראשוני  $p$ . הראו כי קיים ראשוני  $q$  כך ש- $q \mid n^p - p$  לא מתחלק ב- $q$  לכל  $n$  טבעי.
9. מצאו את כל השלמים החיוביים  $k$  כך שקיימת  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  המקיימת  $\gcd(f(m) + n, f(n) + m) \leq k$  לכל  $m, n$  טבעיים שונים.

בתאבון!