

תרגיל מספרים

1. הוכיחו שאם $mn + 1$ מתחלק ב-24, אז גם $m + n$.
2. הוכיחו שמבין עשרה מספרים עוקבים, יש לפחות אחד שזר למכפלת האחרים.
3. נתון $p > 3$ ראשוני, הוכיחו ש- $6^p - 1 - 7^p$ מתחלק ב-43.
4. מצאו את כל ה- n עבורם $n! | 2^{n-1}$.
5. הוכיחו שעבור p ראשוני:
$$\binom{k}{p} = \left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor \pmod{p}$$
6. הוכיחו שעבור כל ראשוני p קיים n כך ש- $1 - 2^n + 3^n + 6^n$ מתחלק ב- p .
7. נתון p ראשוני גדול מ-3, ונסמן $S = \{p - n^2 | n^2 < p\}$. הוכיחו שיש ב- S שני מספרים שונים, כך שהקטן מחלק את הגדול.
8. הוכיחו שעבור אינסוף n מתקיים ש:
$$n! | n^2 + 1$$
9. נתון $p > 5$ ראשוני, הוכיחו שקיימים $0 \leq a, b, c < p$ שונים, כך ש:
$$p | abc - 1$$
$$p | a + b + c$$
10. נתון $p > 3$ ראשוני, ו- $k = \left\lfloor \frac{2p}{3} \right\rfloor$, הוכיחו שהסכום:
$$\binom{p}{1} + \binom{p}{2} + \dots + \binom{p}{k}$$
מתחלק ב- p^2 .
11. נתון $p > 2$ ראשוני, הוכיחו שבין $1, 2, 3, \dots, \lfloor \sqrt{p} \rfloor$ ישנו מספר שאינו שארית ריבועית מוד p .
12. בלי להשתמש במשפט דירכלה, הראו שישנם אינסוף ראשוניים שספרת האחדות שלהם היא 9.

בתיאבון