ט"ו באלול תשפ"א **מחנה קיץ** 23/8/2021

קבוצת ירדן

תחרות בע"פ

דף איילה

1. בבית ספר לומדים 500 תלמידים, חלקם בנים וחלקן בנות. כל בן מכיר 30 תלמידים אחרים וכל בת מכירה 20 תלמידים אחרים. מהו המספר הגדול ביותר האפשרי של זוגות של בן ובת שמכירים זה את זו? היכרות זה יחס הדדי.

2. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{Z}_{>0}\rightarrow\mathbb{Z}_{>0}$ כך שלכל $m,n\in\mathbb{Z}_{>0}$ מתקיים

$$n+m+f(mn)\le mn+f(n+m)$$

3. בכל קודקוד של קובייה רשום מספר חיובי שלם. כל 8 המספרים האלה שונים. בכל פאה, מכפלת המספרים בקודקודים שלה זה אותו המספר. באחד הקודקודים רשום 1, בקודקודים סמוכים אליו לפי מקצועות רשומים המספרים 30, 42 ו-70. מצאו את כל המספרים בקודקודים האחרים של קובייה.

4. על כביש מעגלי נמצאות בסדר זה 4 עיירות נקודתיות: איילון, ברווזיה, גמלה, ודורבנית. ביום בהיר אחד, היפו, וומבט וזברה החליטו לעשות כל אחד מסע אופניים במהירויות קבועות (אך שונות). אורך המסע של כל אחד מהם הוא פחות ממעגל שלם. היפו וומבט יצאו מגמלה בו-זמנית בכיוונים הפוכים: וומבט לכיוון של דורבנית והיפו לכיוון של ברווזיה. ברגע שוומבט הגיע לדורבנית יצאה משם זברה בכיוון הפוך לכיוון הנסיעה של וומבט, ובאותו רגע היפו חלף על פני ברווזיה. וומבט והיפו הגיעו בו-זמנית לאיילון. זברה וומבט הגיעו בו-זמנית לברווזיה, שם הם עצרו את הנסיעה והלכו לשתות קפה.

הראו כי זברה הייתה בגמלה בדיוק באותו הרגע כשוומבט והיפו חלפו על פני איילון.

בהצלחה!

קבוצת ירדן

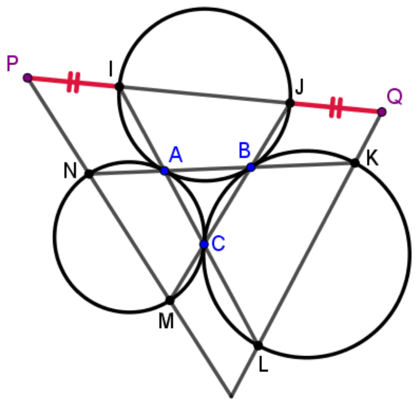
תחרות בע"פ

דף ברווז

5. נתונים $n\ge 2$ ומספרים $0\le a_1,a_2,...,a_n\le 1$. הראו כי

$$(a_1+a_2+...+a_n)(1-a_1a_2...a_n)+(n-2)a_1a_2\cdot...\cdot a_n\le n-1$$

6. מצא את כל הפתרונות בשלמים למשוואה $m^m=n^4+4$.



7. מעגלים α,β,γ משיקים בזוגות באופן חיצוני בנקודות A,B,C, כאשר A לא נמצאת על α ו-B לא נמצאת על β. הישר AB פוגש שנית את המעגלים α ו-β בנקודות K ו-N בהתאמה. הישר BC פוגש שנית את המעגלים β ו-γ בנקודות M ו-J בהתאמה. הישר AC פוגש שנית את המעגלים α ו-γ בנקודות L ו-I בהתאמה.

הישר IJ פוגש את הישרים MN ו-KL בנקודות P ו-Q בהתאמה. הראו כי $PI=QJ$.

בהצלחה!

23/8/2021 **מחנה קיץ** ט"ו באלול תשפ"א

קבוצת רותם

1. מצא את כל הפתרונות בשלמים למשוואה $m^m = n^4 + 4$.

2. מעגלים α, β, γ משיקים בזוגות באופן חיצוני בנקודות A,B,C, כאשר A לא נמצאת על α ו-B לא נמצאת על β. הישר AB פוגש שנית את המעגלים α ו- β בנקודות K ו-N בהתאמה. הישר BC פוגש שנית את המעגלים β ו- γ בנקודות M ו-J בהתאמה. הישר AC פוגש שנית את המעגלים α ו- γ בנקודות L ו-I בהתאמה.

הישר IJ פוגש את הישרים MN ו-KL בנקודות P ו-Q בהתאמה. הראו כי $\mathrm{PI} = \mathrm{QJ}$.

3. חפיסה מורכבת מ-40 קלפים שונים קסומים (בעצם הקלפים רגילים לגמרי). בזמן שגנדלף יוצא מהחדר, ניצן בוחר קלף, מראה אותו לבילבו, ומחזיר אותו לחפיסה. בילבו בוחר מהחפיסה 9 קלפים, ולאחר מכן ניצן מוסיף אליהם 5 קלפים לפי בחירתו ומערבב את תת-החפיסה של 14 קלפים שהתקבלה. לבסוף גנדלף חוזר לחדר ומסתכל על תת-החפיסה של 14 קלפים. האם גנדלף יוכל לנחש איזה קלף ניצן בחר בהתחלה? לגנדלף ולבילבו מותר לתאם אסטרטגיה מראש, אבל אסור להם לתקשר במהלך הקסם.

בהצלחה!

קבוצת ירדן

1. האם קיימת סדרה של שברים מצומצמים $\frac{p_1}{q_1},\frac{p_2}{q_2},\frac{p_3}{q_3},\ldots,\frac{p_{5781}}{q_{5781}}$, כאשר p_i, q_i הם מספרים שלמים וחיוביים לכל i, כך שמתקיים $0<\frac{p_1}{q_1}<\frac{p_2}{q_2}<\ldots<\frac{p_{5781}}{q_{5781}}<1$ ויחד עם זאת $\frac{p_1+1}{q_1+1}>\frac{p_2+1}{q_2+1}>\ldots>\frac{p_{5781}+1}{q_{5781}+1}$?

2. למסיבה הגיעו 9 אנשים בעלי שמות שונים, כך שכל אחד מהם מכיר לפחות K אנשים אחרים במסיבה (היכרות היא הדדית). עבור אילו ערכים של K ניתן בהכרח לרשום את השמות של כל האנשים במסיבה בטבלה 3×3 כך שכל שני אנשים באותה שורה מכירים זה את זה, וגם כל שני אנשים באותה עמודה מכירים זה את זה?

3. במשולש ABC, נסמן את מרכז המעגל החסום ב־I. נסמן ב־ω את המעגל שמרכזו I ורדיוסו מחצית רדיוס המעגל החסום במשולש. המשיקים מ־B,C ל־ω שקרובים יותר לצלע BC נפגשים בנקודה X. באופן דומה, שני הזוגות הנוספים של המשיקים ל־ω שקרובים לצלעות נפגשים בנקודות Y ו־Z (Y קרובה ל־AC ו־Z קרובה ל־AB). מה גדול יותר – שטח המשולש ABC, או פעמיים שטח המשושה AYCXBZ?

4. מצאו את כל הזוגות של פולינומים מתוקנים (בעלי מקדם מוביל 1) עבורם לכל x ממשי מתקיים $P\left(P(x)\right)+Q\left(Q(x)\right)=P\left(Q(x)\right)+Q\left(P(x)\right)$.

בהצלחה!

ט"ז באלול תשפ"א **מחנה קיץ** 24/8/2021

קבוצת רותם

תחרות בע"פ

דף גמל

1. האם קיימת סדרה של שברים מצומצמים $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \ldots, \frac{p_{100}}{q_{100}}$, עם מונים ומכנים שלמים, כאשר $0 < p_i, q_i \le 5781$ לכל i, כך שמתקיים $0 < \frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} < \ldots < \frac{p_{100}}{q_{100}} < 1$ ויחד עם זאת $\frac{p_1+1}{q_1+1} > \frac{p_2+1}{q_2+1} > \ldots > \frac{p_{100}+1}{q_{100}+1}$?

2. במשולש ABC, נסמן את מפגש הגבהים ב-H. תהיינה D,E,F נקודות כך שהמשולשים AHD, BHE, CHF כולם שווי צלעות, ומכוונים לאותו הכיוון, כלומר, הישר HD מונח 60 מעלות עם כיוון השעון ביחס לישר HA, וכך גם הישרים HE, HF ביחס לישרים HB, HC בהתאמה. נסמן ב-X את הנקודה על הצלע AB ששונה מ-A ומקיימת DA=DX. באופן דומה, נסמן נקודות Y ו-Z על הצלעות BC ו-CA בהתאמה. הראו ש-H היא מרכז המעגל החסום במשולש XYZ.

3. בהינתן גרף קשיר, נגדיר את **המרחקיות** שלו להיות סכום המרחקים בין כל זוגות הקודקודים. ליאור בונה גרף עם מרחקיות A. לאחר מכן הוא מוסיף לגרף קשת ומקבל גרף חדש עם מרחקיות B. אלון טוען שעבור המספר C מתקיימת התכונה שלכל גרף ולכל קשת שליאור יכול לבחור, מתקיים $A \cdot C < B$. עבור אילו ערכי C הטענה של אלון נכונה?

4. נתונים 3 מצולעים, A, B, ו-C.

א. האם יתכן כי $A \cup B$, $A \cup C$, ו-$B \cup C$ הם משולש משוכלל, ריבוע, ומחומש משוכלל, בהתאמה?

ב. האם יתכן כי A, B, ו-C הם קמורים, ובנוסף $A \cap B$, $A \cap C$, ו-$B \cap C$ הם משולש משוכלל, ריבוע, ומחומש משוכלל, בהתאמה?

בהצלחה!

קבוצת רותם

תחרות בע"פ

דף דורבן

5. מצאו את כל השלשות של פולינומים מתוקנים (בעלי מקדם מוביל 1) עבורם לכל x ממשי מתקיים $P\big(P(x)\big)+Q\big(Q(x)\big)+R\big(R(x)\big)=P\big(Q(x)\big)+Q\big(R(x)\big)+R\big(P(x)\big)$.

6. קליפה כדורית עם מרכז O חסומה בפירמידה SABCD, כאשר הבסיס ABCD הוא לא מקבילית. נקודת ההשקה של הקליפה עם מישור הבסיס היא T. הישר SO חותך את מישור הבסיס בנקודה P. אמצעי הקטעים AC ו־BD הם M ו־N בהתאמה. הראו כי הנקודה P נמצאת על הישר MN אם ורק אם הנקודה T נמצאת על הישר MN.

7. למסיבה הגיעו 16 אנשים בעלי שמות שונים, שכל אחד מהם מכיר לפחות K אנשים אחרים שהגיעו למסיבה (היכרות היא הדדית). האם בהכרח ניתן לרשום את השמות של כל האנשים במסיבה בטבלה 4×4 כך שכל שני אנשים באותה שורה מכירים זה את זה, וגם כל שני אנשים באותה עמודה מכירים זה את זה, כאשר

א. $\mathrm{K}=11$?

ב. $\mathrm{K}=13$?

בהצלחה!