תחרות קבוצתית

1. לפנדה יש אוסף של K מקלות, שמכל 3 מקלות ניתן להרכיב משולש. עבור איזה K קטן ביותר ניתן בוודאות למצוא 3 מקלות שמרכיבות משולש חד-זוויות.

2. א. הראו ש 25 מחלק את $1^{30}+2^{30}+3^{30}+\ldots+30^{30}$.
ב. האם אחרי חלוקה ב-25 המספר שנשאר ראשוני?

3. לארתור יש 100 גביעים, שמשקליהם 1, 2, 3, . . . , 100 קילוגרם. ארתור רוצה לגלות איזה מהגביעים הוא הגביע הקדוש, שמשקלו 100 קילוגרם. ארתור יכול לסדר את כל 100 הגביעים במעגל בסדר שהוא בוחר. לאחר מכן, מרלין הקוסם אומר לו כמה מהגביעים כבדים יותר מהשכן שלהם עם כיוון השעון.
האם ארתור יכול למצוא את הגביע הקדוש תוך 10^{10} פעולות כאלה?

4. משולש ABC אינו שווה-שוקיים. מרכזי המעגלים החוסם והחסום הם O ו-I. חוצה זווית החיצוני של A פוגש את האנך האמצעי של BC בנקודה N_A. באופן דומה מגדירים נקודה N_B. הראו כי הישרים AN_B, BN_A ו-IO נפגשים בנקודה אחת.

5. נסמן ב N את כמות האפשרויות לצבוע לוח משבצות ארבע על ארבע בשלושה צבעים שונים, כך שכל שתי משבצות סמוכות בצלע יהיו צבועות בצבעים שונים.
האם N גדול, קטן או שווה ל-
א. 50,000 ב. 1,800 ג. 4,000 ד. 11,000

6. נתונים שני מעגלים α ו-β ו-ℓ הוא המשיק החיצוני המשותף שלהם. הישר ℓ' מקביל ל-ℓ וחותך את α בנקודות A ו-B ואת β בנקודות C ו-D, כך שהנקודות A, C, B, D נמצאות על ℓ' בסדר זה. על ℓ' נבחרה נקודה X כך ש-$XA\cdot XC=XB\cdot XD$. הוכיחו כי קיים מעגל γ שמשיק למעגלים α ו-β וגם לישר ℓ' בנקודה X.

7. על כל קודקוד של גרף מכוון מונח כדור ממוספר מ-1 עד N, כאשר כל מספר מופיע על כדור אחד בדיוק. כאשר יש חץ מקודקוד A לקודקוד B, והמספר על הכדור שנמצא בקודקוד A גדול מהמספר על הכדור שנמצא בקודקוד B, מותר להחליף בין שני הכדורים. נתון שבאמצעות פעולות כאלה אפשר להעביר את הכדור שמספרו 1 לכל קודקוד לבחירתך ולאחר מכן להחזירו לקודקוד ההתחלתי שלו. הוכיחו כי ניתן לעשות כל תמורה על הכדורים.

8. מספרים a,b ו-c חיוביים. הראו כי $\frac{3}{\sqrt{a^2+(b-c)^2}}+8\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq\frac{45}{a+b+c}$.

בהצלחה!

כ"ח בסיוון תשפ"א **מחנה קיץ** 8/6/2021

מבחן ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. הראו שלכל 3 מספרים חיוביים b,a ו- c מתקיים

$$\frac{a^2+1}{a^2+2b+2c+1}+\frac{b^2+1}{b^2+2a+2c+1}+\frac{c^2+1}{c^2+2a+2b+1}\ge 1$$

2. מעגל Ω משיק מבחוץ לשישה מעגלים $\omega_1,\omega_2,...,\omega_6$ שמשיקים מבחוץ באופן מעגלי: ω_i משיק ל- ω_{i+1} וגם ω_6 משיק ל- ω_1. המשיקים ל- Ω בנקודות ההשקה שלו עם ω_1, ω_3 ו- ω_5 יסומנו t_1, t_3 ו- t_5 בהתאמה. הישרים t_1 ו- t_3 נפגשים בנקודה A, הישרים t_3 ו- t_5 נפגשים בנקודה B, והישרים t_1 ו- t_5 נפגשים בנקודה C. המשיקים למעגל ω_2 בנקודות ההשקה שלו עם ω_1 ו- ω_3 נפגשים בנקודה X, המשיקים למעגל ω_4 בנקודות ההשקה שלו עם ω_3 ו- ω_5 נפגשים בנקודה Y, והמשיקים למעגל ω_6 בנקודות ההשקה שלו עם ω_1 ו- ω_5 נפגשים בנקודה Z. הישרים AX ו-BY נפגשים בנקודה L. הראו שגם CZ עוברת ב-L.

3. מצאו את 3 הספרות הימניות של $2^{99}+2^{95}+2^{91}+...+2^{19}+2^{15}+2^{11}+2^{7}$.

4. פושע ושני שוטרים בעלי אותה מהירות רצים על מקצועות של קוביה N מימדית. הקוביה שקופה והשוטרים רואים את הפושע בכל רגע נתון. לשוטרים יש אקדחי לייזר, והם מסוגלים לירות בפושע לאורך מקצוע. האם לכל מצב התחלתי השוטרים יכולים להרוג את הפושע

א. עבור N=3 ?

ב. עבור N=4 ?

בהצלחה!

כ"ט בסיוון תשפ"א **מחנה קיץ** 9/6/2021

מבחן ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. על הלוח רשומים כל המספרים מ--2021 עד 2021 (כולל הקצוות). איילה וברווז משחקים משחק. בכל סיבוב איילה בוחרת זוג מספרים מהלוח, ואז ברווז מוחק את שני המספרים ורושם או את סכומם או את מכפלתם לבחירתו. המשחק מסתיים כאשר נשאר מספר אחד על הלוח. מטרת ברווז היא שהמספר שנשאר בסוף יהיה חיובי. האם ברווז תמיד יכול להשיג את מטרתו, ללא תלות באסטרטגיה של איילה?

2. הראו כי לכל ארבעה מספרים חיוביים a,b,c ו- d שסכומם שווה ל-1 מתקיים

$$\frac{a}{2a+1}+\frac{b}{3b+1}+\frac{c}{7c+1}+\frac{d}{42d+1}\le\frac{1}{2}.$$

3. רביעיית מספרים סדורה נקראת <u>מעושרת</u> אם היא מורכבת מ-4 מספרים שלמים לא שליליים, וסכום המספרים ברביעייה שווה ל-10. איילה בוחרת רביעייה מעושרת (a_1,a_2,a_3,a_4) וברווז מנסה לנחש אותה. בכל שלב ברווז מציע לה רביעייה מעושרת (x_1,x_2,x_3,x_4) ואיילה אומרת לו בכמה הוא טעה, כלומר אומרת לו את הערך של

$$|a_1-x_1|+|a_2-x_2|+|a_3-x_3|+|a_4-x_4|.$$

כמה ניחושים נדרשים לברווז בשביל לגלות את הרביעייה שאיילה בחרה במקרה הגרוע ביותר?

4. למרובע חסום ABCD הוצמדו כלפי חוץ משולשים משוכללים ABX, BCY, CDZ ו-DAT. הישרים AY ו-CX נפגשים בנקודה M. הישרים BZ ו-DY נפגשים בנקודה I. הישרים CT ו-AZ נפגשים בנקודה N. הישרים BT ו-DX נפגשים בנקודה K. הראו כי הנקודות K, N, I ו-M נמצאות על מעגל אחד.

בהצלחה!

כ"ט בסיוון תשפ"א **מחנה קיץ** 9/6/2021

מבחן רותם

אין להשתמש במחשבון

1. רביעיית מספרים סדורה נקראת <u>מעושרת</u> אם היא מורכבת מ-4 מספרים שלמים לא שליליים, וסכום המספרים ברביעייה שווה ל-10. איילה בוחרת רביעייה מעושרת $\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right)$ וברווז מנסה לנחש אותה. בכל שלב ברווז מציע לה רביעייה מעושרת $\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)$ ואיילה אומרת לו בכמה הוא טעה, כלומר אומרת לו את הערך של

$$|a_1-x_1|+|a_2-x_2|+|a_3-x_3|+|a_4-x_4|.$$

כמה ניחושים נדרשים לברווז בשביל לגלות את הרביעייה שאיילה בחרה במקרה הגרוע ביותר?

2. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך שלכל x,y ממשיים מתקיים:

$$f\left(x\cdot f(x+y)\right)+f\left(f(y)\cdot f(x+y)\right)=(x+y)^2.$$

3. מהו הערך הקטן ביותר של k עבורו מתקיים

$$\begin{aligned} ad-bc+yz-xt+\left(a+c\right)\left(y+t\right)-\left(b+d\right)\left(x+z\right)\le \\ \le k\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{z^2+t^2}\right)^2 \end{aligned}$$

לכל 8 מספרים ממשיים a,b,c,d,x,y,z,t?

בהצלחה!