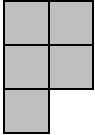


קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון



1. רוצים לרצף לוח משבצות 8×8 באמצעות מרצפות משני סוגים: ריבועים 3×3 ומרצפות של 5 משבצות מהצורה שמופיעה בציור. מותר לסובב ולשקף מרצפות וחייבים לכסות פעם כל משבצת אחת בדיוק. כמה מרצפות מכל סוג נצטרך? יש למצוא את כל התשובות האפשריות לשאלה.

2. נתון המספר $A = 1234567891011...939495$ (המספרים מ-1 עד 95 נכתבו ברצף והודבקו). האם קיימים a_1, a_2, \dots, a_6 שלמים כך ש- $A = a_1^{10} + a_2^{10} + \dots + a_6^{10}$?

3. מה יותר גדול $A = \frac{1^{-3} - 2^{-3}}{1^{-2} - 2^{-2}} - \frac{2^{-3} - 3^{-3}}{2^{-2} - 3^{-2}} + \frac{3^{-3} - 4^{-3}}{3^{-2} - 4^{-2}} - \dots + \frac{2019^{-3} - 2020^{-3}}{2019^{-2} - 2020^{-2}}$ או

$$B = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots + \frac{1}{5781}$$

4. במשולש ABC , כל הזוויות חדות ושונות, מרכז המעגל החוסם הוא O ומרכז המעגל החסום הוא I . המעגל שמרכזו O ורדיוסו שווה למחצית רדיוס המעגל החוסם, יקרא ω . נסמן ב- ℓ_1 את הישר שמשיק ל- ω , מקביל לצלע AB של המשולש ונמצא קרוב יותר לקודקוד C . נסמן ב- ℓ_2 את הישר שמשיק ל- ω , מקביל לצלע AC של המשולש ונמצא קרוב יותר לקודקוד B . הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 נפגשים בנקודה X והישרים AX ו- OI נפגשים בנקודה T . מה יותר גדול: TI או TO ?

5. נתונים 10 מתגים, לכל מתג יכולים להיות שני מצבים: מופעל וכבוי. לכל זוג של מתגים מותאמת נורה שדולקת אך ורק כאשר שני המתגים מופעלים, בסה"כ 45 נורות. המתגים והנורות אינם מסומנים ולא ברור איזו נורה מקושרת לאיזה זוג מתגים. בהתחלה כל המתגים במצב כבוי. כמה פעולות צריך לעשות בשביל לגלות איזה זוג מתגים קשור לכל נורה? בכל פעולה משנים את המצב של מתג אחד בלבד.

בהצלחה!

קבוצת רותם

אין להשתמש במחשבון

$$1. \text{ מה יותר גדול } A = \frac{1^{-3} - 2^{-3}}{1^{-2} - 2^{-2}} - \frac{2^{-3} - 3^{-3}}{2^{-2} - 3^{-2}} + \frac{3^{-3} - 4^{-3}}{3^{-2} - 4^{-2}} - \dots + \frac{2019^{-3} - 2020^{-3}}{2019^{-2} - 2020^{-2}}$$

$$\text{ או } B = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots + \frac{1}{5781} ?$$

2. נתונים 10 מתגים, לכל מתג יכולים להיות שני מצבים: מופעל וכבוי. לכל זוג של מתגים מותאמת נורה שדולקת אך ורק כאשר שני המתגים מופעלים, בסה"כ 45 נורות. המתגים והנורות אינם מסומנים ולא ברור איזו נורה מקושרת לאיזה זוג מתגים. בהתחלה כל המתגים במצב כבוי. כמה פעולות צריך לעשות בשביל לגלות איזה זוג מתגים קשור לכל נורה? בכל פעולה משנים את המצב של מתג אחד בלבד.

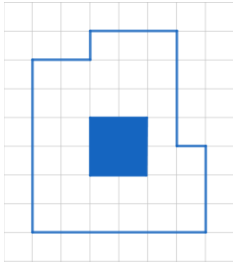
3. נתון משולש ABC חד-זוויות בו מפגש הגבהים יסומן H. הוכיחו שקיים ישר ℓ שמקביל לצלע BC ומשיק לשני המעגלים החסומים במשולשים ABH ו-ACH.

4. לכל r שלם חיובי, נסמן ב- a_r את כמות הפתרונות למשוואה $3^x - 2^y = r$, כאשר $0 \leq x, y \leq 5781$ שלמים. מהו הערך המקסימלי של a_r ?

בהצלחה!

תחרות קבוצתית

אין להשתמש במחשבון



1. חלקו את הצורה בציור ל-2 צורות חופפות:

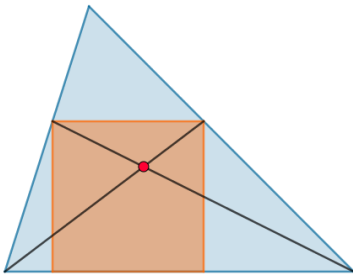
2. תארו את כל ההעתקות f מהמישור למישור, כך שלכל 3 נקודות A , B ו- C שלא נמצאות על ישר אחד, היקף המשולש ABC שווה לסכום שלושת המרחקים בין הנקודות $f(A)$, $f(B)$ ו- $f(C)$.

$$n \quad \frac{1}{n}$$

 k k

4. מהי הכמות הקטנה ביותר של ריבועים עם אורך צלע 0.9 הנחוצה על מנת לכסות ריבוע עם אורך צלע 1? הערה: הריבועים הקטנים לא חייבים להיות מוכלים בריבוע הגדול.

5. בקבוצה בת 8 איברים, משפחה של תתי-קבוצות שונות נקראת **צפופה** אם אין בה אף 3 קבוצות זרות בזוגות. מהו הגודל המירבי של משפחה צפופה?



6. בתוך משולש ABC שכל זוויותיו חדות, חסום ריבוע $PQRT$: הנקודות P ו- T נמצאות על הצלע AC , הנקודה Q נמצאת על הצלע AB , והנקודה R נמצאת על הצלע BC . הישרים RA ו- QC נפגשים בנקודה X . ניתן להגדיר באופן דומה את הנקודות Y ו- Z באופן סימטרי ל- X באמצעות שני הריבועים האחרים שחסומים במשולש. הראו כי הנקודות X , Y ו- Z נמצאות על ישר אחד אם ורק אם למשולש ABC יש זווית של 45° .

7. נסמן ב- V את קבוצת הקודקודים של קוביית היחידה ה- n מימדית. נתונה העתקה $f: V \rightarrow \mathbb{R}^2$, המקיימת שעבור כל $v_1, v_2 \in V$, אם v_1 ו- v_2 מרכיבים צלע בקוביית היחידה, אזי המרחק במישור בין $f(v_1)$ ו- $f(v_2)$ הוא בדיוק 1. מצאו את כל האפשרויות לגודל התמונה של f , כלומר, לכמות הנקודות במישור אליהן הועתקו קודקוד אחד או יותר מ- V , כאשר: (א) $n=3$, (ב) $n=4$.

8. יהיו a , b ו- c מספרים ממשיים שונים עבורם $ab + bc + ca = 3$. הוכיחו כי:

$$\left| \frac{a^2 - bc}{b - c} \right| + \left| \frac{b^2 - ca}{c - a} \right| + \left| \frac{c^2 - ab}{a - b} \right| \geq 6.$$

בהצלחה!

קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

$$1. \text{ פתרו את מערכת המשוואות הבאה (במספרים ממשיים): } \begin{cases} a^3 = b + 3c \\ b^3 = c + 3a \\ c^3 = a + 3b \end{cases}$$

2. יהי $p = 4k + 3$ ראשוני כאשר k שלם. נסמן $M = 1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot (p-1)^{p-1}$. הראו כי לפחות אחד מבין המספרים $M-1$, $M+1$ מתחלק ב- p .

3. יהי ABCDEFGHIJ מצולע משוכלל עם 10 צלעות. תהי T נקודה בתוכו, כך שהמשולש DTE שווה שוקיים: $DT = ET$, וזווית הראש הינה 72° . הראו שקיימת נקודה S כך שהמשולשים FTS ו-HSI שניהם שווי שוקיים, ובשניהם זווית הראש הינה 72° .

4. נתון לוח משבצות 120×120 . החתול בארס מתיישב על אחת ממשבצות הלוח לפי בחירתו. לאחר מכן d דרורים נוחתים על משבצות הלוח לפי בחירתם (מספר דרורים יכולים להימצא באותה המשבצת). בארס והדרורים משחקים בתורות; בכל מהלך של בארס, הוא עובר ממשבצת שבה הוא נמצא למשבצת סמוכה לפי צלע או לפי קודקוד (כמו מלך בשחמט). בכל מהלך של הדרורים, אחד מהדרורים מתעופף מהמשבצת שבה הוא נמצא למשבצת כלשהי לפי בחירתו. המטרה של בארס היא להגיע למשבצת שנמצא בה דרור.

א. הראו שבארס לא יצליח להשיג את מטרתו כאשר $d = 1610$.

ב. הראו שבארס יצליח להשיג את מטרתו כאשר $d = 4800$.

בהצלחה!

קבוצת רותם

אין להשתמש במחשבון

1. יהי ABCDEFGHIJ מצולע משוכלל עם 10 צלעות. תהי T נקודה בתוכו, כך שהמשולש DTE שווה שוקיים: $DT = ET$, וזווית הראש הינה 72° . הראו שקיימת נקודה S כך שהמשולשים FTS ו-HSI שניהם שווי שוקיים, ובשניהם זווית הראש הינה 72° .

2. הראו כי לכל שלושה מספרים חיוביים x, y, z מתקיים אי-השוויון הבא:

$$\frac{x}{\sqrt{yz + 4xy + 4xz}} + \frac{y}{\sqrt{xz + 4xy + 4yz}} + \frac{z}{\sqrt{xy + 4xz + 4yz}} \geq 1.$$

3. נתון לוח משבצות $n \times n$. החתול בארס מתיישב על אחת ממשבצות הלוח לפי בחירתו. לאחר מכן d דרורים נוחתים על משבצות הלוח לפי בחירתם (מספר דרורים יכולים להימצא באותה המשבצת). בארס והדרורים משחקים בתורות; בכל מהלך של בארס, הוא עובר ממשבצת שבה הוא נמצא למשבצת סמוכה לפי צלע או לפי קודקוד (כמו מלך בשחמט). בכל מהלך של הדרורים, אחד מהדרורים מתעופף מהמשבצת שבה הוא נמצא למשבצת כלשהי לפי בחירתו. המטרה של בארס היא להגיע למשבצת שנמצא בה דרור. האם בארס יצליח להשיג את מטרתו

א. כאשר $d = \left\lfloor \frac{3 \cdot n^2}{25} \right\rfloor$, לכל n גדול מספיק?

ב. כאשר $d = \left\lfloor \frac{3 \cdot n^2}{19} \right\rfloor$, לכל n גדול מספיק?

ג. כאשר $d = \left\lfloor \frac{3 \cdot n^2}{14} \right\rfloor$, לכל n גדול מספיק?

בהצלחה!