להטוטנות מספרים

0. כמה סדרות להטוטנות יש עם B כדורים ומחזור מינימלי n?

1. יהא r שלם חיובי, ותהא $a_0, a_1, \dots$ סדרה אינסופית של מספרים ממשיים. נתון שלכל שני שלמים אי-שליליים m, s קיים שלם חיובי n בקטע $m+1 \le n \le m+r$ כך שמתקיים

$$a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{m+s} = a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+s}.$$

הוכיחו כי הסדרה מחזורית, כלומר קיים $p \ge 1$ שלם עבורו $a_{n+p} = a_n$ לכל $n \ge 0$ שלם.

SL 2013, C5

2. סדרת המספרים השלמים $a_1, a_2, \dots$ מקיימת את שני התנאים הבאים:

(i) $1 \le a_j \le 2015$ לכל $j \ge 1$;

(ii) $k + a_k \ne l + a_l$ לכל $1 \le k < l$.

הוכיחו כי קיימים שני שלמים חיוביים b ו-N כך שמתקיים

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \le 1007^2$$

לכל זוג מספרים שלמים m ו-n המקיימים $n > m \ge N$.

IMO 2015, Q6 (SL C5)

3. נסמן ב-$\mathbb{N}$ את קבוצת השלמים החיוביים. תהא $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ פונקציה. לכל $m, n \in \mathbb{N}$ נסמן $f^n(m) = f(f(\dots f(m) \dots))$ (f מורכבת על עצמה n פעמים). נתון כי מתקיימות התכונות הבאות:

(i) לכל $m, n \in \mathbb{N}$, מתקיים $\frac{f^n(m)-m}{n} \in \mathbb{N}$.

(ii) הקבוצה $\mathbb{N} \setminus \{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$ סופית.

הוכיחו כי הסדרה $f(1)-1, f(2)-2, f(3)-3, \dots$ היא סדרה מחזורית.

SL 2015, N6

4. יהא n שלם חיובי, ויהיו $a_1, \dots, a_n$ מספרים שלמים המקיימים $n \mid a_1 + \cdots + a_n$. הוכיחו כי קיימות שתי פרמוטציות $(b_1, \dots, b_n), (c_1, \dots, c_n)$ של $(1, \dots, n)$ כך שלכל $1 \le i \le n$ מתקיים

$$b_i + c_i \equiv a_i \pmod{n}.$$

SL 2005, C7

5. עבור קבוצות טבעיים סופיות X, Y ולכל k טבעי, נסמן ב-$f_X(k)$ את הטבעי ה-k בגודלו שאינו ב-X, ונגדיר

$$X * Y = X \cup \{f_X(y) : y \in Y\}.$$

נתונות קבוצות לא ריקות A, B של טבעיים בגדלים a, b בהתאמה, ונתון כי $A * B = B * A$. הוכיחו כי

$$\underbrace{A * \big(A * \cdots * \big(A * (A * A)\big) \cdots\big)}_{\text{פעמים } b \text{ מופיע } A} = \underbrace{B * \big(B * \cdots * \big(B * (B * B)\big) \cdots\big)}_{\text{פעמים } a \text{ מופיע } B}$$

SL 2017, C7