סדרות שלמות

בחלק מהשאלות מופיעות סדרות אשר איבריהן הראשונים מצוינים ושאר האיברים מוגדרים ע"פ כלל הנסיגה הנתון בשאלה

1. $a_0 = 0; a_1 = 1; a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ הוכיחו כי $2^k | a_n$ אם ורק אם $2^k | n$.

2. $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 9; x_n = x_{n-1}^3 x_{n-2} + x_{n-2}^3 + x_{n-3}$ הראו כי לכל מספר שלם k קיים n חיובי עבורו $k | x_n$.

3. יהיו x_1, x_2 מספרים זרים. סדרה $\{x_n\}$ אשר מתחילה בx_1, x_2 מוגדרת כך $x_{n+1} = x_n x_{n-1} + 1$

א. הוכיחו כי לכל $i > 1$ קיים $j > i$ כך ש $x_i^i | x_j^j$.

ב. האם בהכרח קיים $j > 1$ כך ש $x_1 | x_j^j$?

4. נסמן ב $p(n)$ את המספר הראשוני הגדול ביותר שמחלק את n

א. $p_1 = 2; p_n = p(p_1 \cdot \ldots \cdot p_{n-1} + 1)$ האם 11 מופיע בסדרה?

ב. $a_n = a_{n-1} + p(a_{n-1})$, הראו כי הסדרה מכילה ריבוע.

5. $a_1 = 1$, a_n הוא המספר החיובי השלם הקטן ביותר ששונה מ $a_1, \ldots, a_{n-1}$ עבורו הממוצע של $a_1, \ldots, a_n$ הוא שלם. הראו כי הסדרה $a_n - n$ מכילה כל מספר שלם בדיוק פעם אחת.

6. האם קיימת סדרה אינסופית של ספרות שונות מאפס $\{a_n\}$ ומספר טבעי N כך שלכל $k > N$ המספר $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1}$ הוא ריבוע שלם?

7. מצאו את כל המספרים הטבעיים n כך שקיימת סדרה $a_1, \ldots, a_n$ של מספרים טבעיים המקיימת

$a_{k+1} = \frac{a_k^2+1}{a_{k-1}+1} - 1$ עבור $2 \le k \le n-1$.

8. יהי $c \ge 1$ טבעי. סדרה מוגדרת כך $a_1 = c; a_{n+1} = a_n^3 - 4ca_n^2 + 5c^2 a_n + c$. הוכיחו כי לכל $n \ge 2$ קיים מספר ראשוני p אשר מחלק את a_n אבל לא את המספרים $a_1, \ldots, a_{n-1}$.