

מחנה פסח, מרץ 2021

1. יהי a, b, c, x, y, z מספרים חיוביים עבורם $a + b + c = x + y + z$.
הוכיחו כי: $ax^3 + by^3 + cz^3 \geq abc(x + y + z)$.

2. יהי a, b, c מספרים חיוביים, אשר מכפלתם היא אחת.
הוכיחו כי: $\frac{a}{a^3b + b^4 + c^4} + \frac{b}{b^3c + c^4 + a^4} + \frac{c}{c^3a + a^4 + b^4} \leq 1$.

3. x, y, z מספרים ממשיים שונים. הוכיחו כי:
 $(x + y + z) \left(\frac{3x + y - z}{(z - x)^2} + \frac{3y + z - x}{(x - y)^2} + \frac{3z + x - y}{(y - z)^2} \right) \geq -1$.

4. עבור כל a, b חיוביים ו- x, y ממשיים הוכיחו כי:
 $\left(\frac{1 + a}{2} \right)^{2x(x+y)} \left(\frac{1 + b}{2} \right)^{2y(x+y)} \geq a^{x^2} b^{y^2} \left(\frac{a + b}{2} \right)^{2xy}$.

5. יהי a, b, c מספרים חיוביים המקיימים $abc = 1$. הוכיחו כי:
 $\frac{a}{a + b^2 + c^3} + \frac{b}{b + c^2 + a^3} + \frac{c}{c + a^2 + b^3} \leq 1$.