

25.08.2021

אי שוויון תמורות

1. יהי $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n, b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ ו- τ תמורה של $1, 2, \dots, n$.

$$\sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1} \leq \sum_{k=1}^n a_k b_{\tau(k)} \leq \sum_{k=1}^n a_k b_k \quad (\text{א) הוכיחו כי:})$$

$$n \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1} \leq \sum_{k=1}^n a_k \sum_{k=1}^n b_k \leq n \sum_{k=1}^n a_k b_k \quad (\text{ב)}$$

2. יהי a, b, c מספרים לא שליליים. הוכיחו כי:

$$a^4 b + b^4 c + c^4 a \geq (a^2 + b^2 + c^2) abc$$

3. יהי a, b, c מספרים חיוביים. הוכיחו כי:

$$\frac{a^2 - bc}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{b^2 - ca}{\sqrt{c^2 + a^2}} + \frac{c^2 - ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \geq 0$$

4. יהי a, b, c, d מספרים לא שליליים שסכומם שווה ל-4.

$$\frac{1}{8 + a^2} + \frac{1}{8 + b^2} + \frac{1}{8 + c^2} + \frac{1}{8 + d^2} \leq \frac{4}{9} \quad (\text{הוכיחו כי:})$$

5. יהי a, b, c מספרים לא שליליים שסכומם שווה ל-3. הוכיחו כי:

$$a^2 b + b^2 c + c^2 a + abc \leq 4$$

6. יהי a, b, c, d, e מספרים חיוביים, שסכומם שווה ל-5. הוכיחו כי:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{e} + \frac{e}{a} \leq 1 + \frac{4}{abcde}$$

7. יהי a, b, c מספרים לא שליליים שסכומם שווה ל-4. מצא את

$$\text{הערך המקסימלי של הביטוי: } a^3 b + b^3 c + c^3 a$$

8. יהי a, b, c מספרים לא שליליים, אשר סכום ריבועיהם שווה ל-3.

$$\text{הוכיחו כי: (א) } a^2 b + b^2 c + c^2 a \leq abc + 2$$

$$\text{(ב) } a^3 b^2 + b^3 c^2 + c^3 a^2 \leq 3$$