

מחנה קיץ 2021

1. יהי a, b, c מספרים חיוביים. הוכיחו כי:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad (\text{א})$$

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2 \quad (\text{ב})$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[3]{\frac{b}{c+a}} + \sqrt[3]{\frac{c}{a+b}} \geq 2 \quad (\text{ג})$$

$$\sqrt[4]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[4]{\frac{b}{c+a}} + \sqrt[4]{\frac{c}{a+b}} \geq 2 \quad (\text{ד})$$

2. יהי a, b, c מספרים חיוביים, $a+b+c=1$ ו- $ab+ac+bc=q$. הוכיחו כי: $(a+2q)^a(b+2q)^b(c+2q)^c \leq 1$.

3. יהי a, b, c מספרים חיוביים. הוכיחו כי:

$$\sqrt[4]{\frac{ab}{a^2-ab+b^2}} + \sqrt[4]{\frac{bc}{b^2-bc+c^2}} + \sqrt[4]{\frac{ca}{c^2-ca+a^2}} \geq \frac{24abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

4. יהי a, b, c מספרים ממשיים. הוכיחו כי:

$$\frac{a}{a^2+b^2+2} + \frac{b}{b^2+c^2+2} + \frac{c}{c^2+a^2+2} \leq \frac{3}{4}$$

5. יהי a, b, c מספרים חיוביים עבורם $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 1$. הוכיחו כי:

$$\sqrt{\frac{ab}{a+b+2c}} + \sqrt{\frac{bc}{b+c+2a}} + \sqrt{\frac{ca}{c+a+2b}} \leq \frac{1}{2}$$

6. על המעגל החוסם את $\triangle ABC$ לקחו נקודות X ו- Y כך ש-
 $CX = AX + BX$ ו- $CY = AY + BY$. הוכיחו כי: $\angle XCY \leq 60^\circ$.