

## אינקודציה מחוזקת

1. נתונים שלמים חיוביים  $k$  ו- $n$ . בחברה מסוימת יש מדיניות כיצד למכור ספרים. כל לקוח רשאי לשכנע עד שני אנשים לקנות ספר לאחר שהוא קונה כזה; שכנוע של לקוח שכבר שוכנע קודם לכן אינו נחשב. כל אחד מהלקוחות החדשים הללו יכול לשכנע שני אחרים וכן הלאה. אם לקוח מסוים שכנע שני לקוחות, וכל אחד מהשניים הללו גורם ללפחות  $k$  אנשים לקנות ספר, באופן ישיר או עקיף, אז אותו לקוח זוכה במחשב בחינם. הוכיחו כי אם  $n$

אנשים בסך הכל קנו ספרים, אז לכל היותר  $\frac{n}{k+2}$  מהם קיבלו מחשב.

2. הוכיחו כי קיימים אינסוף שלמים חיוביים  $n$  המקיימים  $2^n + 2 \mid n!$ .

3. במצולע משוכלל בעל 2019 צלעות כל צלע נצבעה באדום, צהוב או כחול כך שיש 673 צלעות מכל צבע. הוכיחו כי ניתן לחלק את המצולע למשולשים באמצעות אלכסונים שלא נחתכים ולצבוע את כל האלכסונים באדום, צהוב או כחול כך שלכל משולש מצויר, או שכל צלעותיו באותו צבע או שכל צלעותיו בצבעים שונים.

4. מחלקים את כל המחרוזות של 0 ו-1 באורך  $n$  לשתי קבוצות  $A$  ו- $B$  בנות  $2^{n-1}$  איברים כל אחת. הוכיחו כי יש לפחות  $2^{n-1}$  זוגות סדורים  $(a,b) \in A \times B$  כך ש- $a$  ו- $b$  נבדלות בדיוק במקום אחד.

5. נתון עץ  $T$  בעל  $n$  צלעות. הוכיחו כי ניתן לחלק את קוביית היחידה ה- $n$ -ממדית לאיחוד זר בצלעות של תתי-גרפים שאיזומורפיים ל- $T$ .

הערה. קודקודי קוביית היחידה ה- $n$ -ממדית הם כל המחרוזות באורך  $n$  של אפסים ואחדות. שני קודקודים בקובייה מחוברים בצלע אם ורק אם הם נבדלים בדיוק במקום אחד.

6. בקובייה  $n \times n \times n$  כל קוביית יחידה נצבעה באחד מבין  $C$  צבעים. לכל קופסה  $1 \times n \times n$  של  $n^2$  קוביות יחידה, בכל אחד משלושת הכיוונים האפשריים, נתבונן בקבוצת הצבעים המופיעים בה (כל צבע מוצג רק פעם אחת). בדרך זו מוגדרות  $3n$  קבוצות של צבעים, המחולקות לשלוש מחלקות על פי הכיוון. נניח שכל קבוצת צבעים המופיעה במחלקה כלשהי, מופיעה גם בכל מחלקה אחרת. מצאו את הערך האפשרי המרבי של  $C$ .

7. כל צלע של הגרף השלם עם  $n+2$  קודקודים נצבעה בצבע מסוים, כך שכל צבע מופיע לכל היותר  $n$  צלעות. הוכיחו כי יש בגרף משולש שכל צלעותיו נצבעו בצבעים שונים.

8. נתון גרף פשוט וקשיר בעל  $n$  קודקודים. נניח שהדרגה של כל קודקוד בגרף היא לפחות  $k$ . הוכיחו כי ניתן לצבוע את צלעות הגרף ב- $n-k$  צבעים כך שבין כל שני קודקודים בגרף יש מסלול שכל הצלעות בו בצבעים שונים.

**בתאבון!**