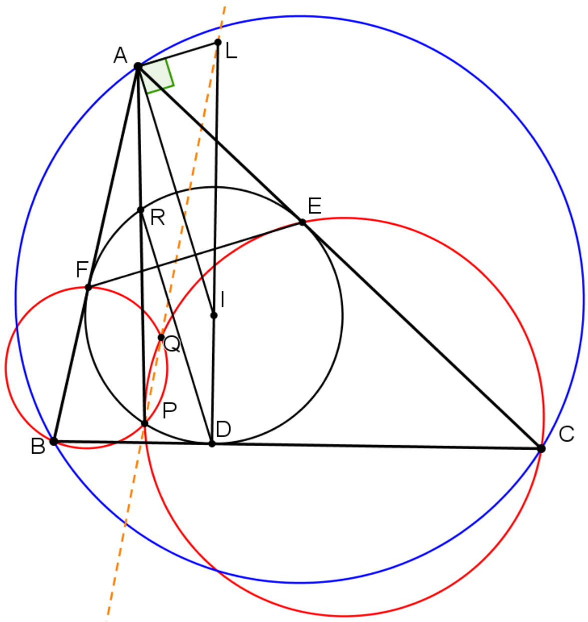
:IMO 2019 P.6

<u>ניסוח השאלה:</u> המעגל החסום במשולש ABC משיק לצלעות בנקודות D, E, F. מרכז המעגל החסום יסומן I. תהי R נקודה על המעגל החסום כך ש-DR מאונך ל-EF. הישר AR חותך את המעגל החסום שנית בנקודה P. המעגלים החוסמים של BPF, CPE נחתכים שנית בנקודה Q. נסמן את החיתוך של DI עם חוצה הזווית החיצוני של $\angle BAC$ ב-L.

הוכיחו כי P, Q, L נמצאות על ישר אחד.



:פתרון 1

נסמן ב-N את הקוטב הצפוני ב-ABC וב-G את הנקודה הנגדית ל-D על ω. נשים לב כי $FEGR$ טרפז.

נסמן ב-L את החיתוך של DI עם AN.

<u>טענה 1:</u> $ALDP$ מעגל.

<u>הוכחה:</u>

$$\angle DPA = \angle DPE + \angle EPR = \angle DPE + \angle GPF = \angle(FE, DG) = \angle(AN, DL)$$

<u>טענה 2:</u> $BQIC$ מעגל.

<u>הוכחה:</u> $\angle BQC = \angle BQP + \angle PQC = \angle BFP + \angle PEC = \angle FEP + \angle EFP =$
$180^o - \angle EPF = 180^o - \frac{1}{2}\angle EIF = 180^o - 90^o + \frac{1}{2}\angle BAC = \angle BIC$

נסמן את החיתוך השני של המעגלים AEF, ABC ב-M. M זה מרכז העתקה הספירלית שמעביר את AEF ל-NCB. נבדוק מה קורה לעוד נקודות בהעתקה הספירלית.
נשים לב ש-$\angle REF = \angle EDG = \angle ECI = \angle ICB$ ובאופן דומה $\angle RFE = \angle IBC$ ולכן R עוברת ל-I. נסמן את התמונה של P בהעתקה הספירלית ב-K. P נמצא על FRE ולכן K נמצא על המעגל BIC.

<u>טענה 3:</u> P, Q, K על ישר.

<u>הוכחה:</u> $\angle BQK = \angle BCK = \angle FEP = \angle BFP = \angle BQP$

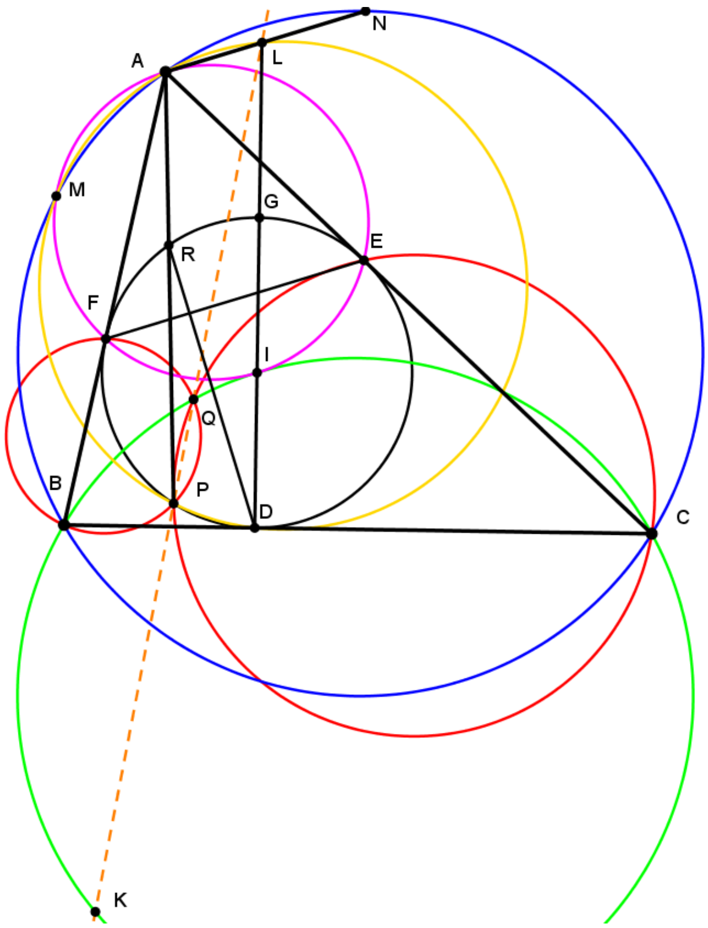
<u>טענה 4:</u> M נמצאת על המעגל $DLAP$.

<u>הוכחה:</u> SD עובר באמצע קשת BC (זו טענה מוכרת שמוכיחים עם אינוורסית תלתן) ולכן

$$\angle LDM = 90^o - \angle MDB = \angle NCM = 180^o - \angle NAM$$

<u>טענה 5:</u> L, P, K ישר.

<u>הוכחה:</u> $\angle MPK = \angle MAN = 180^o - \angle MPL$.



פתרון 1'

טענות 1,2 מוכחות באופן זהה לפתרון הקודם.

נסמן את החיתוך השני של AP עם המעגל החוסם ב-T. כפי שאמרנו $GR||EF$ ולכן AG ו-AR סימטריים (כישרים) ביחס לחוצה הזווית של A ולכן T זו נקודת ההשקה של המעגל החצי חסום מול-A.

נסמן את החיתוך השני של PQ עם ב-K.

<u>טענה 3:</u> N, I, K ישר.

<u>הוכחה:</u> $\angle EFP = \angle CEP = \angle CQP = \angle CBK$. באותו אופן $\angle BCK = \angle FED$

בנוסף כמו בפתרון הקודם $\angle CBI = \angle RFE$, $\angle BCI = \angle REF$ ולכן המרובעים $DERF$ ו-$KCIB$ דומים אבל המרובע הראשון הרמוני ולכן גם השני ולכן KI עובר ב-N.

המתרה שלנו היא להוכיח ש-$\angle APL = \angle KPT$ אבל אנחנו יודעים כבר ש-$\angle APL = \angle ADL$. בנוסף נשים לב כי הישר TD חותך את המעגל החוסם בנקודה A' כך ש-$ABCA'$ טרפז, כלומר TN חוצה את הזווית $\angle ATD$ ולכן אם נשקף את AT ביחס ל-TI הוא יעבור לישר AD אבל המעגל החסום כמובן נשמר בשיקוף הזה ולכן P חיבת לעבור ל-D כלומר TI הוא האנך האמצעי של PD. מכך נסיק ש-$\angle TDK = \angle KPT$.

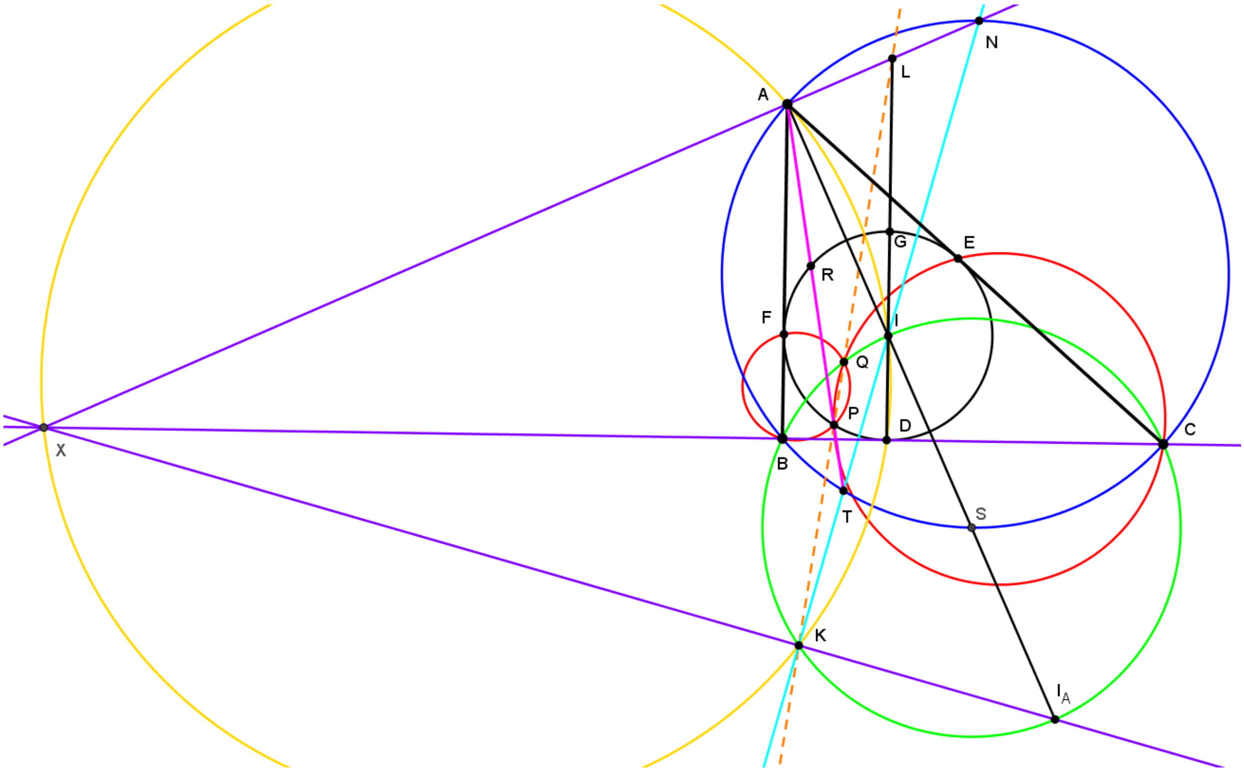
כלומר אנחנו רוצים להוכיח ש-$\angle IDA = \angle TDK$.

נשים לב ש-$\angle AIG = \angle(AS, BC) = 90^o - \angle ACS = 90^o - \angle NCA = \angle ITD$

ולכן מספיק לנו להוכיח ש-$\angle IAD = \angle TKD$ וזה יסיים את השאלה.

שוויון הזוויות $\angle IAD = \angle TKD$ שקול לכך ש-A, I, D, K מעגל.

נסמן את החיתוך של BC עם המעגל AID ב-X. IX הוא קוטר של מעגל זה ולכן A, N, X נמצאות על ישר. נשים לב ש-N, A, K, I_A נמצאות על מעגל שקוטרו NI_A ולכן מצירים רדיקליים על המעגל החוסם של ABC, מעגל התלתן והמעגל האחרון שאמרנו נקבל ש-AN, BC, KI_A נפגשים בנקודה ולכן $\angle IKX = 90^{\text{o}}$ וקיבלנו את המעגל שרצינו.



<u>**פתרון 1''**</u>

נראה סיום אחר לפתרון האחרון, נמשיך מהרגע שהוכחנו ש-K על IN ו-TI אנך אמצעי של DP.

המתרה היא להוכיח ש-K, P, L ישר. נעשה הומותטיה חצי מ-I. K יעבור ל-T מכיוון $\angle STI$ ישרה ו-S הוא מרכז מעגל תלתן כלומר נמצא על האנך האמצעי של I, K. נסמן את האמצע של IL ב-Y ואת האמצע של IP ב-Z. עכשיו מספיק להוכיח ש-Y, Z, T ישר.

נסמן את מרכז המעגל ABC ב-O ונשים לב שבמשולש ANS, $IL||NS$ ו-AO הוא תיכון ולכן Y נמצא על AO.

בנוסף נשים לב ש-$\angle PIT = \angle TID = \angle TNO = \angle NTO$ ולכן $PI||TO$.

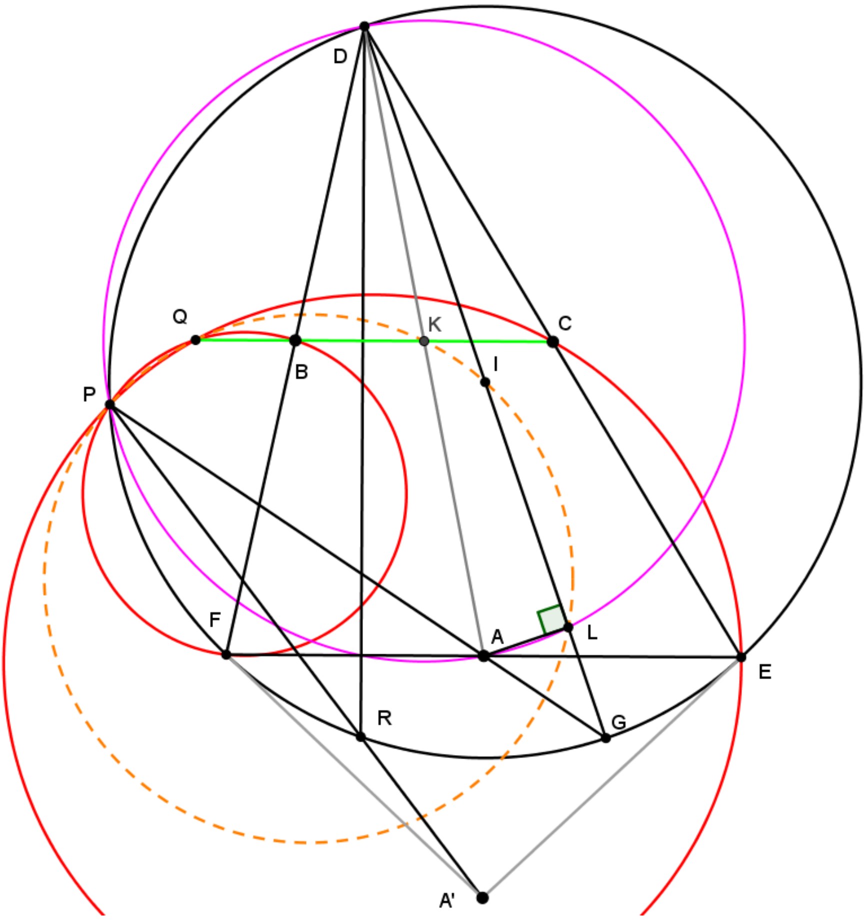
<u>טענה:</u> TY חוצה את PI.

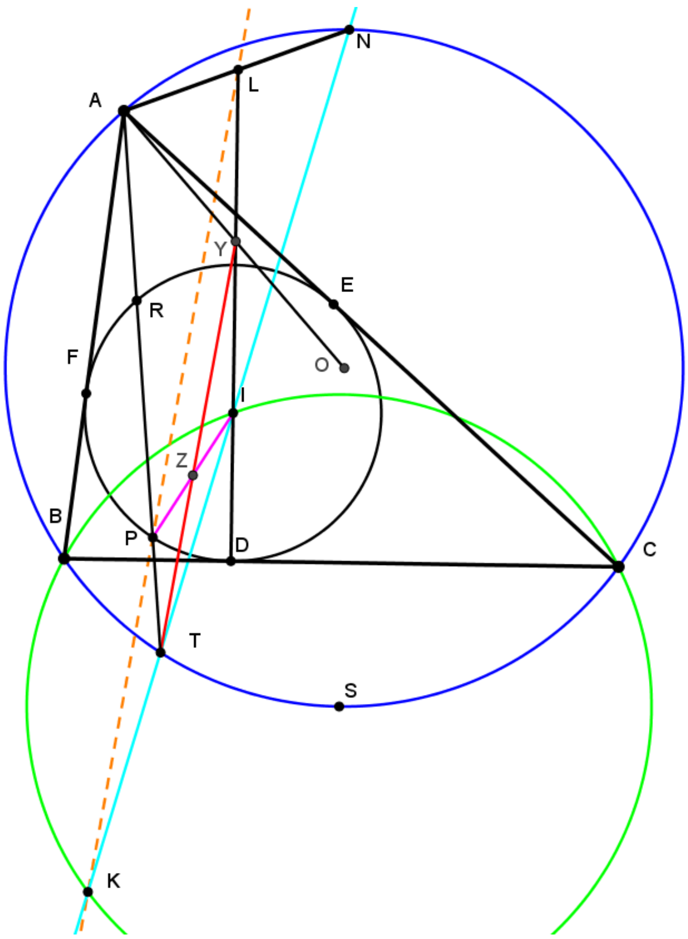
ברור שטענה זו מסיימת את השאלה.

<u>הוכחת הטענה:</u>

$$-1 = (N,S;O,\infty) = (IN \cap AO, A; O, Y) = (I, P; \infty, TY \cap IP)$$

השוויון הראשון נובע מהטלה ל-AO דרך I והשוויון השני נובע מהטלה ל-PI דרך T.





<u>**פתרון שני, אינוורסיה:**</u>

נבצע אינוורסיה ביחס למעגל החסום וננסח את השאלה האינוורסית ביחס למשולש DEF.

יהי DEF משולש החסום במעגל ω שמרכזו I. הגובה מ-D חותך את ω ב-R. אמצעי הצלעות יסומנו A,B,C. המישקים ל-ω ב-E,F נחתכים ב-A'. הישר $A'R$ חותך את ω שנית ב-P. המעגלים PBF ו-PCE נחתכים ב-Q. עקב האנך מ-A ל-DI יסומן L. צריך להוכיח ש-$PQIL$ חסום במעגל. בנוסף נסמן את החיתוך השני של DI עם ω ב-G.

ברור כי $\overset{\frown}{FR} = \overset{\frown}{GE}$ בנוסף PR הוא תיכושקף ב-PFE ו-PA הוא התיכון ולכן PA עובר ב-G. לפיכך $\angle DPA = \angle DPG = 90^o$ ולכן $DALP$ מעגל.

<u>טענה 1:</u> Q,B,C ישר.

<u>הוכחה:</u> $\angle PQB = 180^o - \angle PFB = 180^o - \angle PEB = \angle PQC$

נסמן ב-K את החיתוך השני של המעגל PQI עם הישר BC. נחשב זוויות:

$$\angle KIP = \angle KQP = \angle BFP = \angle DGP = \frac{1}{2}\angle DIP$$

ולכן קיבלנו ש-$\angle KIP = \angle DIK = \angle DGP$ כלומר $KI||GP$ ולכן K על האנך האמצעי של DP. כפי שהוכחנו KI הוא חוצה הזווית $\angle PIL$ ולכן ש-L נמצאת על המעגל PKI אם ורק אם K נמצאת על האנך של PL כלומר K היא מרכז המעגל $DLAP$ כלומר אמצע AD.

כעט נגדיר את K מחדש להיות אמצע AD. נשים לב ש-KI קטע אמצעים ב-DAG ולכן $KI||PQ$ בנוסף ברור גם ש-KI חוצה את הזווית $\angle DIP$ ולכן מטיעונים שכבר אמרנו נובע ש-$PQKIL$ מעגל.

פתרון שלישי, חישוב מרוכב:

נחשב במרוכבים ביחס ל-DEF. נניח ש-$D = 1$. אז מתקיים ש-

$$A = \frac{2ef}{e+f}, R = -ef$$

P נמצאת על המעגל החסום ולכן $\overline{P} = \frac{1}{P}$ בנוסף A, P, R ישר ולכן מתקיים ש-

$$\frac{r-p}{r-a} = \overline{\frac{r-p}{r-a}} = \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{r} - \overline{a}} = \frac{r \cdot \frac{p-r}{pr}}{1 - r\overline{a}}$$

ולכן

$$p = \frac{a-r}{1-r\overline{a}} = \frac{\frac{2ef}{e+f} + ef}{1 + ef \cdot \frac{2}{e+f}} = \frac{ef(2+e+f)}{e+f+2ef}$$

L מוגדר להיות החיתוך של ID עם חוצה הזווית החיצוני. L נמצא על ID ולכן l ממשי. בנוסף LA מאונך ל-AI ולכן $\frac{l-A}{A} \in i\mathbb{R}$ כלומר

$$0 = \frac{l - \frac{2ef}{e+f}}{\frac{2ef}{e+f}} + \frac{l - \frac{2}{e+f}}{\frac{2}{e+f}} = l(e+f)(1+ef) - 4ef$$

$$l = \frac{4ef}{(e+f)(1+ef)}$$

נזכיר שמרכז של המעגל החוסם של משולש ABC כללי נתון על ידי הנוסחה:

$$\frac{\begin{vmatrix} a & |a|^2 & 1 \\ b & |b|^2 & 1 \\ c & |c|^2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix}}$$

<u>הוכחת הנוסחה:</u> מרכז המעגל יסומן z ורדיוס המעגל יסומן R. ידוע ש-

$$|z-a| = |z-b| = |z-b| = R$$

נעלה בריבוע ונקבל ש-

$$R^2 = (z-a)(\overline{z}-\overline{a}) = |z|^2 - a\overline{z} - \overline{a}z + |a|^2$$

ומשוואות דומות עבור b, c כלומר אנחנו רוצים לפתור את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} \overline{a}z + a\overline{z} + R^2 - |z|^2 = |a|^2 \\ \overline{b}z + b\overline{z} + R^2 - |z|^2 = |b|^2 \\ \overline{c}z + c\overline{z} + R^2 - |z|^2 = |c|^2 \end{cases}$$

נחשוב על זה כמערכת משוואות בשלושה נעלמים $z, \overline{z}, R^2 - |z|^2$.

הנוסחה נובעת ישירות מנוסחת קרמר שאומרת באופן כללי את הדבר הבא:

עבור מערכת משוואות של n משוואות ב-n נעלמים שבייצוג מטריציוני נראית כך

$$Ax = b$$

כאשר A מטריצה n על n הפיכה ו-x הוא וקטור שורה של המשתנים.

אז הנוסחה אומרת שלמשוואה יש פתרון יחיד שמקיים ש-

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

כאשר A_i זו מטריצה המתקבלת מהמטריצה A על ידי החלפת העמודה ה-i-ית בווקטור העמודה b.

נוכיח את נוסחת קומר:

נתבונן במטריצה

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

נסמן ב-A^{-1} את המטריצה ההפוכה של A ונשים לב שהעמודה הראשונה של X_1 שווה בדיוק ל-$A^{-1}b$ וכל עמודה הבאה שווה ל-A^{-1} שמוכפל בעמודה המתאימה ב-A לפיכך $X_1 = A^{-1}A_1$ ולכן מתקיים גם ש-

$$\det(X_1) = \det(A^{-1}A_1) = \det A^{-1} \cdot \det A_1 = \frac{\det A_1}{\det A}$$

אבל $\det(X_1) = x_1$ ולכן הנוסחה הוכחה.

נחזור לחישוב המרוכב!

נסמן את מרכז המעגל החוסם של BPF ב-O_B. ונקבל ש-

$$O_B = \frac{\begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ \frac{2f}{1+f} & \frac{4f}{(1+f)^2} & 1 \\ f & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p & \overline{p} & 1 \\ \frac{2f}{1+f} & \frac{2}{1+f} & 1 \\ f & \overline{f} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1+f} \frac{\begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 2f(1+f) & 4f & (1+f)^2 \\ f & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p & \overline{p} & 1 \\ 2f & 2 & 1+f \\ f & \overline{f} & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{1}{1+f} \frac{\begin{vmatrix} p & 0 & 1 \\ 2f(1+f) & -(1-f)^2 & (1+f)^2 \\ f & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p & \overline{p} & 1 \\ 2f & 2 & 1+f \\ f & \overline{f} & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{1}{1+f} \cdot \frac{(1-f)^2(f-p)}{(1+f)\left(\frac{f}{p} - \frac{p}{f}\right) + 2p - 2f + 2f\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{p}\right)} =$$

$$= \frac{(1-f)^2(f-p)}{(1+f) \cdot (\frac{f}{p} + \frac{f^2}{p} - \frac{p}{f} - p + 2p - 2f + 2 - \frac{2f}{p})}$$

$$= \frac{(1-f)^2(f-p)}{(1+f) \cdot (\frac{f^2}{p} + p - \frac{p}{f} - \frac{f}{p} + 2 - 2f)} =$$

$$= \frac{(1-f)^2(f-p)}{(1+f)(f-1)(\frac{f}{p}+\frac{p}{f}-2)} = \frac{(f-1)(f-p)}{(1+f)(f-p)(\frac{1}{p}-\frac{1}{f})} = \frac{(f-1)}{(1+f)(\frac{1}{p}-\frac{1}{f})}$$
$$= \frac{(f-1)f}{(f+1)(\frac{e+f+2ef}{e(2+e+f)}-1)} = \frac{ef(f-1)(2+e+f)}{(f+1)(ef-e+f-e^2)}$$
$$= \frac{ef(f-1)(2+e+f)}{(f+1)(e+1)(f-e)}$$

באופן דומה

$$O_C = \frac{ef(e-1)(2+e+f)}{(e-f)(e+1)(f+1)}$$

$$O_B - O_C = \frac{ef(2+e+f)}{(1+e)(1+f)(e-f)}(1-f+1-e)$$
$$= \frac{ef(2+e+f)(2-e-f)}{(1+f)(1+e)(e-f)}$$

נשאר לבדוק ש-PL מאונך ל-O_BO_C. לשם כך נחשב את $P-L$

$$P - L = \frac{ef(2+e+f)}{e+f+2ef} - \frac{4ef}{(e+f)(1+ef)}$$
$$= ef \cdot \frac{(2+e+f)(e+f)(1+ef) - 4(e+f+2ef)}{(e+f+2ef)(e+f)(1+ef)}$$

אנחנו הולכים לחלק את $P-L$ ב-$O_B - O_C$ ולבדוק שיוצא מדומה טהור, בשביל לקצר את החישובים נבדוק אם יש ביטויים שהולכים להצטמצם. ברור ש-$2+e+f$ לא יצטמצם אבל נשים לב שאם נציב $e+f=2$ במונה של $P-L$ הוא יתאפס כלומר אפשר לצמצם את $2-e-f$:

$$(2+e+f)(e+f)(1+ef) - 4(e+f+2ef)$$
$$= (2-e-f)(e+f)(1+ef) + 2(1+ef)(e+f)^2$$
$$- 4(e+f+2ef)$$
$$= (2-e-f)(e+f)(1+ef) + 2(e+f)(e+f-2)$$
$$+ 2ef((e+f)^2-4)$$
$$= (2-e-f)(e+f)(1+ef) + 2(e+f)(e+f-2)$$
$$+ 2ef(e+f-2)(e+f+2) =$$

$$= (2-e-f)\big((e+f)(1+ef) + 2(e+f) + 2ef(e+f+2)\big)$$

$$\frac{O_B - O_C}{P-L} = \frac{(2+e+f)(e+f+2ef)(e+f)(1+ef)}{(1+f)(1+e)(e-f)\big((e+f)(1+ef)+2(e+f)+2ef(e+f+2)\big)}$$

נצמיד:

$$\overline{(2+e+f)(e+f+2ef)(e+f)(1+ef)} = \frac{(2ef+f+e)}{ef}\frac{f+e+2}{ef}\frac{f+e}{ef}\frac{ef+1}{ef}$$

$$\begin{aligned}\overline{(e+f)(1+ef)+2(e+f)+2ef(e+f+2)} &= \frac{(f+e)(ef+1)}{e^2f^2}+2\frac{f+e}{ef}+2\frac{f+e+2ef}{e^2f^2}\\ &= \frac{(f+e)(ef+1)+2ef(e+f)+2(e+f)+4ef}{e^2f^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\overline{(1+f)(1+e)(e-f)\big((e+f)(1+ef)+2(e+f)+2ef(e+f+2)\big)}\\ &\quad= \frac{f+1}{f}\cdot\frac{e+1}{e}\cdot\frac{f-e}{ef}\frac{(f+e)(ef+1)+2ef(e+f)+2(e+f)+4ef}{e^2f^2}\end{aligned}$$

נשאר לשים לב שה-$(xyz)^4$ במחנה מצטמצם ואחרי ההצמדה כל הביטויים חזרו לעצמם למעט $e-f$ שהפך להיות $f-e$, לפיכך המספר הוא מדומה טהור וסיימנו.

פתרון רביעי, לינאריות של דרגה:

נזכר שבהינתן שני מעגלים קבועים ω_1, ω_2, פונקציית הפרש הדרגות ביחס למעגלים:

$$f(P) = pow_{\omega_1}(P) - pow_{\omega_2}(P)$$

זו פונקציה לינארית. זאת מפני שפונקציית הדרגה ריבועית וכאשר מחסרי בין שתיהן כל האיברים ממעלה 2 מצטמצמים.

אנחנו רוצים להוכיח של-L דרגה שווה ביחס לשני המעגלים BFP ו-CEP. אבל נשים לב שיש לה דרגה שווה ביחס לשני המעגלים $BDIF$ ו-$CDIE$. בנוסף ברור שהדרגה של A ביחס ל-BFP שווה לדרגה של A ביחס ל-$BDIF$ וכנ"ל גם לגבי המעגלים CPE ו-$CDIE$, כלומר $pow_{BPF}(A) - pow_{CPE}(A) = pow_{BDIF}(A) - pow_{CDIE}(A)$ ולכן אם נמצא נקודה נוספת X על הישר AL שגם עבורה מתקיים ש-

$$pow_{BPF}(X) - pow_{CPE}(X) = pow_{BDIF}(X) - pow_{CDIE}(X)$$

נדע שהפרשי הדרגות שווים לכל נקודה על הישר, בפרט שווים ב-L אך כפי שאמרנו כבר $pow_{BDIF}(L) - pow_{CDIE}(L) = 0$ ולכן ינבע ש-$pow_{BPF}(L) = pow_{CPE}(L)$ וננצח.

נבחר את X להיות החיתוך של AL עם BC ונסמן ב-U את החיתוך השני של BFP עם BC וב-V את החיתוך השני של CPE עם BC.

מטרתינו היא להראות את השוויון

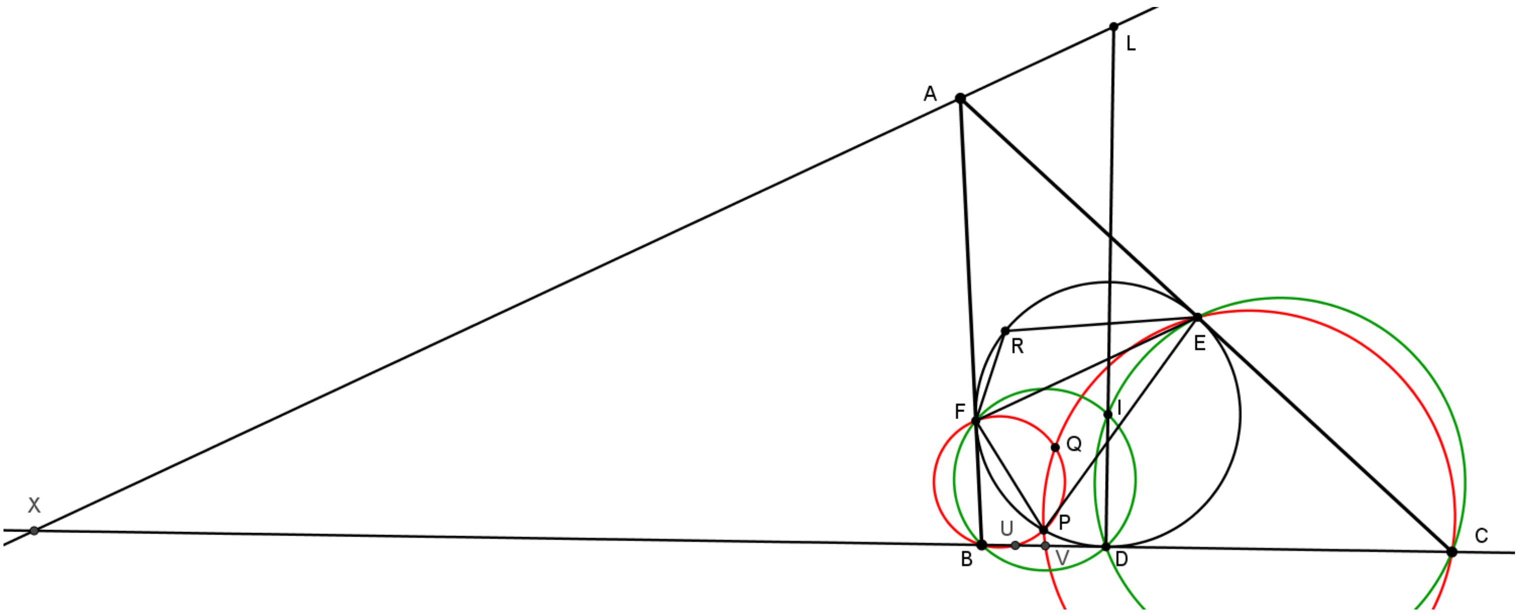
$$XB \cdot XU - XV \cdot XC = XB \cdot XD - XD \cdot XC$$

כלומר

$$XC \cdot VD = XB \cdot UD$$

אבל $\frac{AC}{AB} = \frac{XC}{XB}$ ולכן מספיק להראות

$$\frac{UD}{VD} = \frac{AC}{AB}$$



נשים לב ש-

$$\angle UPD = 360^o - \angle UPF - \angle DPF = \angle ABC + \angle DEF = 90^o + \frac{\beta}{2}$$

ובאופן דומה

$$\angle VPD = \angle VPE - \angle DPE = 180^o - \gamma - \angle DFE = 90^o - \frac{\gamma}{2}$$

ממשפט הסינוסים נקבל ש-

$$\frac{UD}{\sin \angle UPD} = \frac{PD}{\sin \angle DUP}$$

$$\frac{VD}{\sin \angle VPD} = \frac{PD}{\sin \angle DVP}$$

נשים לב ש- $\angle DUP = \angle BFP = \angle FEP$ ו- $\angle DVP = \angle PEA = 180^o - \angle PFE$

ולכן

$$\frac{UD}{VD} = \frac{sin\angle UPD \cdot sin\angle DVP}{sin\angle DUP \cdot sin\angle VPD} = \frac{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot sin\angle PFE}{\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cdot sin\ \angle FEP}$$

נשים לב ש-

$$\frac{sin\angle PFE}{sin\ \angle FEP} = \frac{PE}{PF}$$

אבל המרובע $PERF$ הרמוני ולכן

$$\frac{PE}{PF} = \frac{RE}{RF} = \frac{sin\angle RFE}{sin\angle REF} = \frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$$

סך הכל קיבלנו ש-

$$\frac{UD}{VD} = \frac{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)} = \frac{AC}{AB}$$

פתרון 5, עקום אליפטי:

נסתכל על המקום הגיאומטרי של נקודות Z כך שהציר הרדיקלי של המעגלים BFZ, CEZ עובר ב-L.

<u>טענה:</u> המקום הגיאומטרי הוא עקום אליפטי.

<u>הוכחה:</u> משוואת המעגל BFZ היא

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_B^2+y_B^2 & x_B & y_B & 1 \\ x_F^2+y_F^2 & x_F & y_F & 1 \\ x_Z^2+y_Z^2 & x_Z & y_z & 1 \end{vmatrix} = 0$$

והדרגה של L ביחס למעגל הזה היא

$$\frac{\begin{vmatrix} x_L^2+y_L^2 & x_L & y_L & 1 \\ x_B^2+y_B^2 & x_B & y_B & 1 \\ x_F^2+y_F^2 & x_F & y_F & 1 \\ x_Z^2+y_Z^2 & x_Z & y_z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_B & y_B & 1 \\ x_F & y_F & 1 \\ x_z & y_z & 1 \end{vmatrix}}$$

חילקנו במחנה בשביל לנרמל את המשוואה של המעגל.

נקבל שהמקום הגיאומטרי שלנו נתון על ידי המשוואה

$$\frac{\begin{vmatrix} x_L^2+y_L^2 & x_L & y_L & 1 \\ x_B^2+y_B^2 & x_B & y_B & 1 \\ x_F^2+y_F^2 & x_F & y_F & 1 \\ x_Z^2+y_Z^2 & x_Z & y_z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_B & y_B & 1 \\ x_F & y_F & 1 \\ x_z & y_z & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x_L^2+y_L^2 & x_L & y_L & 1 \\ x_C^2+y_C^2 & x_C & y_C & 1 \\ x_E^2+y_E^2 & x_E & y_E & 1 \\ x_Z^2+y_Z^2 & x_Z & y_z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_B & y_B & 1 \\ x_F & y_F & 1 \\ x_z & y_z & 1 \end{vmatrix}}$$

נכפיל במכנה ונקבל משוואה ממעלה 3 ב-Z.

המתרה שלנו היא להראות ש-P נמצאת על המקום הגיאומטרי. הוכחנו בפתרון הראשון ש-$ALDP$ מעגל ולכן מבחינתנו P מוגדר להיות החיתוך של המעגל ALD עם המעגל החסום.

נשנה את השם של מרכז המעגל החסום ל-K. ונסמן ב-I, J את הנקודות באינסוף שכל המעגלים עוברים דרכן.

ברור ש-L נמצאת על העקום.

<u>טענה 2:</u> E,F,I,J נמצאות על המקום הגיאומטרי.

<u>הוכחה:</u> נבחר $Z=E$ ונקבל את המעגלים BFE ו-CEE וברור שניתן לבחור את הכיוון של המשיק למעגל CEE ב-E כך ש-L תהיה על הציר הרדיקלי. באופן דומה נקבל ש-F על העקום.

נבחר $Z=I$. נבחר את המעגל BFI כך שהמשיק למעגל ב-I יעבור ב-L. אבל המעגלים BFI ו-CEI משיקים ב-I ולכן המשיק המשותף שלהם זה IL, כלומר L על הציר הרדיקלי.

נשים לב שהנקודות על העקום באות בזוגות, לכל Z החיתוך השני של BFZ עם CEZ, נסמן אותו Z' נמצא גם הוא על העקום ולכן מתקיים ש-

$$C+E+Z+Z'+I+J=0=B+F+Z+Z'+I+J$$

כלומר $C+E=B+F$ ולכן החיתוך של CE עם BF, שזה A, נמצא על העקום.

בשביל להראות ש-P נמצא על העקום עלינו להראות ש-

$$D+E+F+I+J=A+L+D+I+J$$

כלומר ש-$E+F=A+L$, לפיכך עלינו להראות ש-EF ו-AL נחתכים על העקום אבל הם מקבילים, כלומר אנחנו רוצים להראות שהישר באינסוף חותך את העקום פעם שלישית בנקודה שנמצאת על AL. משמע עלינו להראות ש-$A+L=I+J$ אבל אנחנו כבר יודעים ש-$A+E+C=0$ ובנוסף, לכל זוג נקודות מתאימות על העקום Z,Z' הוכחנו שמתקיים ש-$C+E+Z+Z'+I+J=0$ ובנוסף מתקיים ש-$Z+Z'+L=0$ ולכן $C+E+I+J=L$ ולכן $I+J=A+L$ וניצחנו!

<u>**פתרון 5', יאיר אליפטי:**</u>

בפתרון זה L מוגדרת להיות החיתוך של PQ עם DI.

נסמן ב-ω_1,ω_2 את המעגלים $BDIF,CDIE$ וב-$\Gamma_1\Gamma_2$ את המעגלים BPF,CPE.

נסתכל על המקום הגיאומטרי של הנקודות t שבקואורדינטות הומוגניות נתון על ידי המשוואה:

$$\frac{d(t,\omega_1)\cdot d(t,\Gamma_2)-d(t,\omega_2)\cdot d(t,\Gamma_1)}{z}=0$$

זהו עקום ממעלה 3 כיוון שבמונה ביטויים מהצורה x^4,y^4 ו-x^2y^2 מתקזזים, כל ביטוי אחר מתחלק ב-z ולכן לאחר חלוקה ב-z כל המחוברים יהיו ממעלה 3 לכל היותר.

נשנה את השם של מרכז המעגל החסום ל-K. ונסמן ב-I, J את הנקודות באינסוף שכל המעגלים עוברים דרכן ונסמן את העקום שלנו ב-γ.

<u>טענה 1:</u> $A, B, C, D, E, F, I, J, K, P, Q, L$ נמצאות על γ.

<u>הוכחה:</u> B, C, D, K, E, F, P, Q על γ במונה כל אחד מהמחוברים מתאפס. L על γ כי היא נמצאת על הציר הרדיקלי של ω_1 עם ω_2 וגם על הציר הרדיקלי של Γ_1 עם Γ_2.
באופן דומה גם A על γ כי היא נמצאת על הציר הרדיקלי של ω_1 עם Γ_1 וגם על הציר הרדיקלי של Γ_2 עם ω_2.
I על העקום כיוון ש-$d(X, \omega_1)$ מתאפס ב-I ולכן $d(X, \omega_1) \cdot d(X, \Gamma_2)$ מתאפס פעמיים ב-I כלומר המונה מתאפס פעמיים ולאחר חלוקה בישר האינסוף הביטוי עדיין מתאפס ב-I.
באופן זהה לחלוטין J נמצאת על העקום.

<u>טענה 2:</u> ∞_{EF} על γ.

<u>הוכחה:</u> נתבונן בעיפרון של עקומים ממעלה 3 שעוברים ב-$A, B, C, D, E, F, I, J, K$. כל עקום בעיפרון חותך את המעגל החסום ב-D, E, F ובנקודה רביעית Y, כלומר לכל בחירה של נקודה Y על המעגל החסום נקבל עקום בעיפרון, יתר על כן העקום תלוי באופן פרויקטיבי בבחירה של Y. באופן דומה ניתן להסתכל על נקודות החיתוך של כל עקום בעיפרון עם ישר האינסוף, שתיים מבניהן הן I, J שהן קבועות והנקודה השלישית Z ניתן לבחירה, כלומר לכל עקום בעיפרון ניתן להתאים נקודה על ישר האינסוף וגם ההתאמה הזו פרויקטיבית.

סך הכל אם נרכיב את שתי העתקות נקבל העתקה פרויקטיבית מהמעגל החסום לישר האינסוף.

נשים לב ש-$(AEFK) \times l_{BC}$ נמצא בעיפרון ומשיק למעגל החסום ב-D. ולכן בהעתקה הפרויקטיבית שלנו D תעבור ל-∞_{BC}. באופן דומה E תעבור ל-∞_{AC} ו-F ל-∞_{AB}.

γ חותך את המעגל החסום ב-P ולכן בעצם אנו רוצים להראות שבהעתקה הפרויקטיבית P תעבור ל-∞_{EF}.

נסמן את החיתוך של חוצה זווית החיצוני של $\angle ABC$ עם BC ב-X. נטיל את ישר האינסוף דרך A ל-BC ונקבל ש-

$$(\infty_{AB}, \infty_{AC}; \infty_{EF}, \infty_{BC}) = (B, C; X, \infty_{BC}) = -\frac{c}{b}$$

לכן מספיק לנו להוכיח ש-$(F, E; P, D) = -\frac{c}{b}$ אבל זה חישוב שעשינו כבר בפתרון 4:

$$\frac{FP}{EP} = -\frac{FR}{ER} = -\frac{sin\angle REF}{sin\angle RFE} = -\frac{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

ו-

$$\frac{DE}{DF} = \frac{\sin \angle DFE}{sin\angle DEF} = \frac{\sin(90^o - \frac{\gamma}{2})}{\sin\,(90^o - \frac{\beta}{2})} = \frac{\cos(\frac{\gamma}{2})}{\cos(\frac{\beta}{2})}$$

ולכן

$$(F, E; P, D) = -\frac{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)} = -\frac{\sin(\gamma)}{\sin(\beta)} = -\frac{c}{b}$$

<u>סיום:</u> עלינו להראות ש-A, L ו-∞_{EF} נמצאות על הישר.
אנו יודעים שמתקיים ש-

$$I + J + K + D + E + C = 0 = E + C + A$$

כלומר

$$I + J = A - K - D$$

אבל $K + D + L = 0$ ולכן

$$I + J = A + L$$

כלומר AL ו-IJ נחתכים על העקום אבל כפי שהוכחנו, הנקודה השלישית שבה ישר האינסוף חותך את העקום זו ∞_{EF} וזה בדיוק מה שרצינו.

<u>פתרון שישי:</u>

נסמן את החיתוכים של EF עם PL, DI, AP ב-X, Y, Z בהתאמה.

<u>טענה 1:</u> X נמצאת על RI.

<u>הוכחה:</u> נסמן ב-L' את החיתוך של AR עם AL. נשים לב ש-$(A, Z; R, P) = -1$ ולכן אם נטיל את הרביעיה הזו מ-X על AL נקבל ש-$(A, \infty; L', L) = -1$ כלומר L, L' סימטריות ביחס ל-A ולכן גם ביחס ל-AI ולכן IL סימטרי ל-IL' ביחס ל-AI ולכן הקטעים IL ו-IL' חותכים את המעגל החסום בנקודות שסימטריות ביחס ל-AI אבל AL חותך ב-G ולכן AL' חותך ב-R.

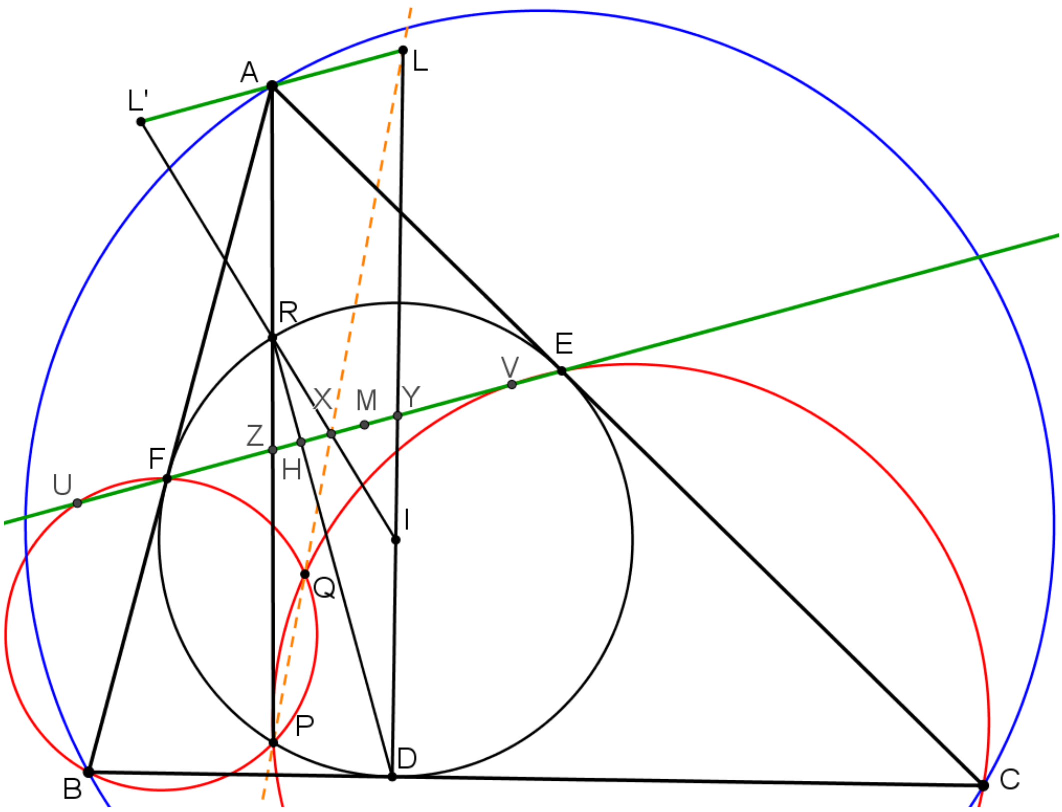
כעט אנו רוצים להוכיח של-X דרגה שווה ביחס למעגלים BPF, CPE.
נסמן ב-U את החיתוך השני של EF עם המעגל BPF וב-V את החיתוך השני של EF עם CPE.

צריך להראות ש-$XV \cdot XE = XU \cdot XF$ נוסיף $XE \cdot XF$ לשני האגפים ונקבל שצריך להוכיח ש-

$$XE \cdot VF = XF \cdot UE$$

כלומר מספיק לנו להוכיח ש-

$$\frac{XE}{XF}=\frac{EU}{FV}$$



נסמן ב-G את החיתוך של DI עם המעגל החסום וב-H את החיתוך של DR עם EF.

<u>טענה 2:</u> $\frac{XE}{XF}=\left(\frac{DF}{DE}\right)^2\cdot\frac{HE}{HF}$

<u>הוכחה:</u> מהוכחת טענה 1 אנחנו יודעים ש-X,Y סימטריים ביחס לאמצע EF ולכן נקבל

$$\frac{XE}{XF}=\frac{YF}{YE}=\frac{S_{\Delta DYF}}{S_{\Delta DYE}}=\frac{DF}{DE}\cdot\frac{d(Y,DF)}{d(Y,DE)}=\frac{DF}{DE}\cdot\frac{GF}{GE}=\frac{DF}{DE}\cdot\frac{\frac{GD\cdot EH}{ED}}{\frac{GD\cdot FH}{FD}}$$

$$=\left(\frac{DF}{DE}\right)^2\cdot\frac{HE}{HF}$$

<u>טענה 3:</u> $\frac{EU}{FV}=\left(\frac{DF}{DE}\right)^2\cdot\left(\frac{HE}{HF}\right)^2\cdot\frac{BF}{CE}$

<u>הוכחה:</u> מלמת העתקה הספירלית נדע שהמשולשים PEU ו-PFB דומים ולכן

$$\frac{UE}{BF}=\frac{PE}{PF}$$

באותו אופן המשולשים PVF ו-PCE דומים ולכן

$$\frac{VF}{CE}=\frac{PF}{PE}$$

ולכן נקבל ש-

$$\frac{UE}{VF}=\left(\frac{PE}{PF}\right)^2\cdot\frac{BF}{CE}$$

נזכר שהמרובע $PRFE$ הרמוני, כלומר $\frac{PE}{PF}=\frac{RE}{RF}$.

נשים לב ש-$\sin\angle REF=\frac{RH}{RE}$ ו-$\sin\angle RFE=\frac{RH}{FR}$ ולכן

$$\frac{RE}{RF}=\frac{\sin\angle RFE}{\sin\angle REF}=\frac{\sin\angle HDE}{\sin\angle HDF}=\frac{HE\cdot DF}{HF\cdot DE}$$

ולכן

$$\frac{UE}{VF}=\left(\frac{RE}{RF}\right)^2\cdot\frac{BF}{CE}=\left(\frac{HE\cdot DF}{HF\cdot DE}\right)^2\cdot\frac{BF}{CE}$$

<u>סיום:</u> אחרי טענות 2 ו-3 נשאר לנו להוכיח ש-$\frac{HF}{HE}=\frac{BF}{CE}$ ואכן

$$HF=DF\cdot\cos\angle EFD=\frac{BF}{sin\angle BDF}\cdot\sin\angle ABC\cdot\cos\angle EFD$$

כלומר

$$\frac{HF}{BF}=\frac{\sin\beta\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}=2\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$$

וזה סימטרי ב-B,C וניצחנו.

פתרון 7. הפתרון המקורי של מחבר השאלה:

נסמן ב-L את הנקודה על DI כך ש-$\angle LAI = 90^o$. נסמן ב-S את החיתוך של EF עם BC. EF חותך שנית את המעגל BIS בנקודה V ואת המעגל CIS בנקודה U.

נסמן ב-T את החיתוך השני של AR עם המעגל החוסם. כפי שהסברנו כבר בפתרונות הקודמים, T זו נקודת ההשקה של המעגל החצי חסום.

AR חותך את המעגל החוסם של BTI בנקודות T,X ואת המעגל החוסם של CTI בנקודות T,Y.

<u>טענה 1:</u> I,U,X ישר.

<u>הוכחה:</u> נשים לב ש-$\angle XIB = \angle XTB = \gamma$. נסמן את אמצע EF ב-M ונחשב:

$$\angle UIB = \angle AIB - \angle AIU = 90^o + \frac{\gamma}{2} - \angle MIU$$
$$= 90^o + \frac{\gamma}{2} - (90^o - \angle IUM) = \gamma$$

נגדיר מחדש את Q להיות החיתוך של BV עם CU.

<u>טענה 2:</u> המחומש $BQXFU$ חסום במעגל.

<u>הוכחה:</u> כידוע TI חוצה את הקשת BC ולכן

$$\angle UXB = \angle BTI = 90^o - \frac{\alpha}{2} = \angle UFB$$

כלומר $UFBX$ מעגל.

$$\angle FBQ = \angle ABV = \angle SBV - \angle SBA = \angle SIV - \alpha - \gamma$$
$$\angle FUQ = 180^o - \angle SIC$$

ולכן מספיק להוכיח ש-$\angle SIC + \angle SIV = 180^o + \alpha + \gamma$ ואכן

$$\angle SIC + \angle SIV = \angle BIC + \angle BIV = 90^o + \frac{\alpha}{2} + 180^o - \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)$$
$$= 180^o + \alpha + \gamma$$

נסמן ב-N את החיתוך השני של DM עם המעגל החסום.

<u>טענה 3:</u> $BV||FN$

<u>הוכחה:</u> $\angle ABV = \frac{\beta}{2} - \angle VBI = \frac{\beta}{2} - \angle VSI$

נשים לש ש-AD הוא הדואלי של S ביחס למעגל החסום ולכן AD מאונך ל-SI, אבל בנוסף FE מאונך ל-AI ולכן $\angle ESI = \angle DAI$. בנוסף נזכור ש-$AI||DR$ ונמשיך את החישוב:

$$\angle ABV = \frac{\beta}{2} - \angle DAI = \frac{\beta}{2} - \angle ADR = \angle GDF - \angle ADR = \angle RDF + \angle GDA$$
$$= \angle RDF + \angle RDM = \angle FDN = \angle NFA$$

השוויון של $\angle GDA$ ו-$\angle RDM$ נבע משיקוף ביחס לחוצה הזווית של $\angle FDE$.

<u>טענה 4:</u> P נמצאת על המעגל BXF.

<u>הוכחה:</u> נשים לב ש-$AP \cdot AR = AF^2$, אנחנו רוצים להוכיח ש-

$$AP \cdot AX = AF \cdot AB$$

כלומר צריך להוכיח ש-

$$\frac{AR}{AX} = \frac{AF}{AB}$$

אבל

$$\angle ABX = \angle FBX = \angle FUX = \angle FUI = \frac{\gamma}{2} = \angle GDE = \angle RDF = \angle RFA$$

ולכן $FR||BX$ וזה גורר את מה שרצינו.

<u>טענה 5:</u> P, Q, N ישר.

<u>הוכחה:</u> $\angle FPQ = \angle FBQ = \angle AFN = \angle FPN$.

<u>טענה 6:</u> P, N, L ישר.

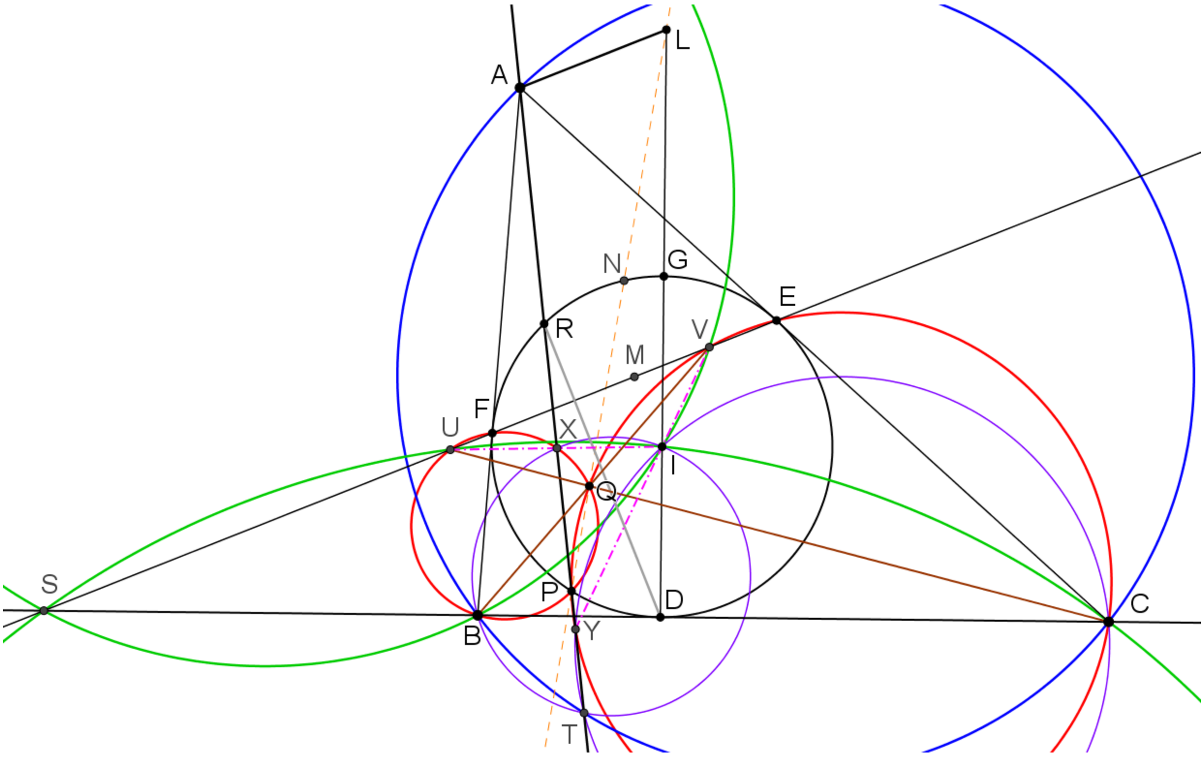
<u>הוכחה:</u> נסמן ב-N' את החיתוך של AD עם המעגל החסום. ברור ש-$NN'||FE$.

נפעיל את הפסקל הבא:

$$\begin{matrix} PGN' \\ DNR \end{matrix}$$

ונקבל ש-A, החיתוך של PN עם DG והחיתוך של EF עם NN', שזה האינסוף בכיוון של AL, נמצאות על ישר וזה בדיוק מה שרצינו.

<u>הוכחה אלטרנטיבית לטענה 6:</u> AP זה תיכושקף במשולש PEF ו-$RG||EF$ ולכן PG הוא התיכון ב-PEF, כלומר עובר ב-M. במרובע החסום $DPNG$ האלכסונים נחתכים ב-M ולכן חיתוך הצלעות הנגדיות נמצא על הדואלי של M שזה כמובן חוצה הזווית החיצוני של $\angle BAC$. קיבלנו ש-DG ו-PN נחתכים על החוצה הזווית החיצוני.



<u>פתרון 7':</u>

כמו בפתרון הקודם נגדיר את L, G, N, M. נגדיר את U, V להיות החיתוכים השניים של EF עם המעגלים BPF, CPE בהתאמה.

<u>טענה 1:</u> Q נמצאת על BV ועל CU.

<u>הוכחה:</u> נשים לב שיש העתקה ספירלית עם מרכז ב-P שמעבירה את B, U ל-F, E. בנוסף קיימת גם העתקה ספירלית עם מרכז ב-P במעבירה את F, E ל-V, C. ההרכבה של שתי העתקות האלו זו העתקה ספירלית עם מרכז ב-P שמעבירה את B, U ל-C, V ולכן מלמת ההעתקה הספירלית נקבל שהחיתוך השני של המעגלים החוסמים של BPU עם PCV נמצא על BV ועל CU.

נשים לב שמטענה 6 של פתרון 7 אנחנו יודעים שמספיק לנו להוכיח ש-P, Q, N ישר.

<u>טענה 2:</u> P, Q, N ישר אם ורק אם $RF||VI$.

<u>הוכחה:</u> P, Q, N ישר אם ורק אם $\angle FPQ = \angle FPN$.

$$\angle FPQ = \angle FBQ = \frac{\beta}{2} - \angle VBI$$

$$\angle FPN = \angle FDN = \angle FDI - \angle NDI = \frac{\beta}{2} - \angle NDI = \frac{\beta}{2} - \angle MDI$$

כלומר קיום הישר PQN שקול לשוויון הזוויות $\angle VBI = \angle MDI$ שהוא בתורו שקול לקיום של העתקה ספירלית עם מרכז ב-I שמעבירה את B ל-D ואת V ל-M.
נשים לב שהעתקה ספירלית כזו קיימת אם ורק אם $\angle IBD = \angle IVM$ אבל מצד שני ברור ש-$\angle IBD = \angle EDR = \angle EFR$ ולכן הישר PQN שקול לכך ש-$\angle IVM = \angle EFR$ כלומר ש-$IV||FR$.

כמובן שמשיקול דומה הישר PQR שקול לכך ש-$IU||ER$.

בשביל לסיים נגדיר מחדש את U,V בתור נקודות על EF שמקיימות ש-$IU||ER$ ו-$IV||FR$ ונראה שהן נמצאות על המעגלים BPF ו-CPE.

<u>טענה 3:</u> $\Delta PFV \sim \Delta \mathrm{PCE}$

ברור שטענה זו תסיים.

<u>הוכחה:</u> בברור מתקיים $\angle VFP = \angle CEP$ ולכן מספיק להוכיח ש-$\frac{PE}{PF} = \frac{CE}{VF}$. נחשב:

$$\frac{PE}{PF} = \frac{RE}{RF} = \frac{\sin \angle RFE}{\sin \angle REF} = \frac{\sin \angle RFE}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{CI \cdot \sin \angle FVI}{IE}$$

נשים לב ש-$\angle FVI = \angle EFR = \frac{\beta}{2}$ ו-$\angle VFI = \frac{\alpha}{2}$ ולכן $\angle VIF = 90^{0} + \frac{\gamma}{2}$.

נשאר לנו להוכיח ש-

$$VF = \frac{IE \cdot CE}{CI \cdot \sin \angle FVI}$$

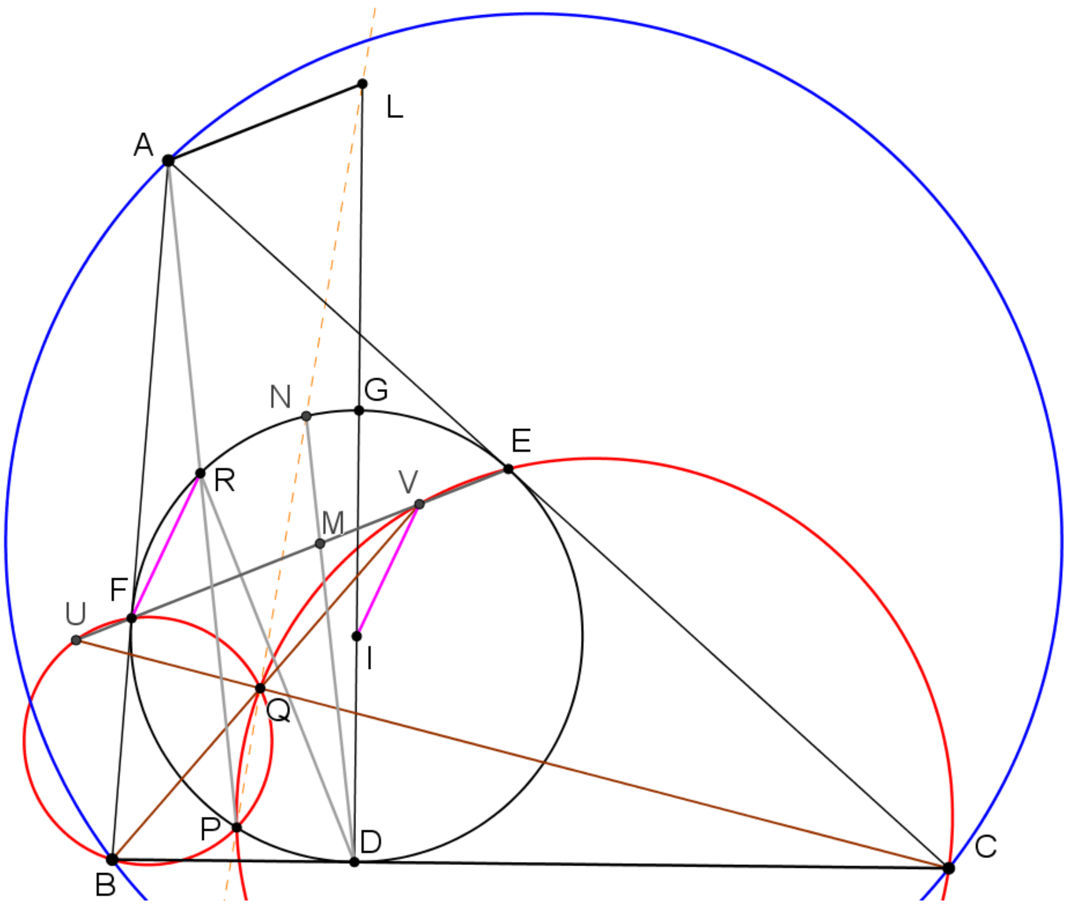
אבל

$$\frac{IE \cdot CE}{CI \cdot \sin \angle FVI} = \cos\frac{\gamma}{2} \cdot \frac{IV}{\sin \angle VEI} = \sin(90^{0} + \frac{\gamma}{2}) \cdot \frac{IV}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

כלומר מספיק לנו להוכיח ש-

$$\frac{VF}{\sin(90^{0} + \frac{\gamma}{2})} = \frac{VI}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

וזה נכון.



פתרון 8.

ננסח שאלה כללית: נתון משולש DEF החסום במעגל ω ו-G נגדית ל-D על המעגל. המשיק ל-ω ב-D פוגש את המשיקים ל-ω ב-F,E בנקודות B,C בהתאמה. תהי N נקודה על ω. נסמן ב-M את החיתוך של DN עם EF. הישר המקביל ל-NE ועובר ב-C חותך את EF ב-U והישר המקביל ל-NF ועובר ב-B חותך את EF ב-V. נסמן ב-Q את החיתוך של BV עם CU וב-P את החיתוך השני של NQ עם ω.

<u>טענה 1:</u> המחומשים $BPQFU, CPQEV$ חסומים.

<u>הוכחה:</u> נשים לב ש-$\angle FEN = \angle QUF$ וגם $\angle FEN = \angle FPN$ וגם ש-

$$\angle FEN = 180^{\circ} - \angle NFB = \angle QBF$$

<u>טענה 2:</u> P,M,G ישר.

<u>הוכחה:</u> נסמן את החיתוך השני של GM עם המעגל ב-P'. נשים לב שכאשר N זזה על המעגל P' זזה פרויקטיבית שכן העתקה מ-N ל-P' היא הרכבה של שתי הטלות: הטלה דרך D על EF ואז הטלה דרך G חזרה על המעגל.
בנוסף נשים לב שהעתקה מ-N ל-P גם היא פרויקטיבית: נטיל מ-F לישר האינסוף, אחר כך נטיל דרך B ל-EF, הגענו ל-V עכשיו העתקה מ-V ל-P היא להעביר מעגל דרך C,E ולחתוך עם המעגל DEF זה כמובן פרויקטיבי (אחרי אינוורסיה ב-E זו פשוט הטלה דרך C מהישר EF לישר DF).

מספיק לבדוק ששתי העתקות מתלכדות ב-3 נקודות.

נקודה ראשונה ושנייה: נבחר את N להיות ב-F (והמקרה השני זה ב-E שהוא כמובן סימטרי). במקרה הזה גם M ב-F והישר NF עובר ב-B ולכן U גם ב-F ואז Q על BF ואז P ב-F גם היא ולכן GMP ישר.

נקודה שלישית: $N = G$. במקרה זה NF מאונך ל-DF ולכן BQ מאונך ל-DF ובאותו אופן CQ מאונך ל-DE ולכן הם נחתכים במרכז מעגל DEF כלומר Q היא מרכז המעגל אבל אז $P = D$ ו-M, G, P נמצאות על הקוטר DG.

לאחר שהוכחנו את הטענה נבחר את N כך ש-M תהיה אמצע EF ונקבל את הקונפיגורציה מהשאלה שלנו ולכן נסיק ש-PQ עובר ב-N. נשאר להוכיח ש-PN עובר ב-L ואת זה הוכחנו בפתרון הקודם (טענה 6 מפתרון 7).