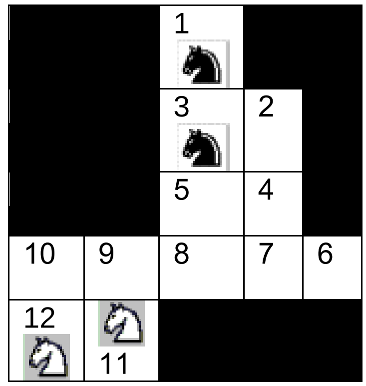
הגרף הסודי

1. על ידי מהלכי פרש חוקיים בלבד החליפו את המקומות של הפרשים הלבנים והפרשים השחורים:



2. בטבלה $n \times n$ סומנו $2n-k$ משבצות בדיוק, כך שבכל שורה יש משבצת מסומנת, ובכל עמודה יש משבצת מסומנת. הראו כי קיימות k משבצות מסומנות, שכל שתיים מהן נמצאות בשורות שונות ובעמודות שונות.
3. הראו שקיימת תת קבוצה אינסופית A של N, כך שלכל $x, y \in A$, הסכום $x+y$ בעל כמות זוגית של מחלקים ראשוניים.
4. נתון לוח בגודל 9×9. מה הוא מספר המשבצות המקסימאלי בלוח זה שניתן לחתוך אותן לאורך שני האלכסונים, כך שהלוח לא יתפרק לכמה חלקים?
5. יהי n מספר טבעי. הוכיחו כי ניתן לשים כמות כלשהי של הספרות 0 ו 1 במעגל, כך שכל מספר בינארי בעל n ספרות יופיע בדיוק פעם אחת במעגל, כאשר קוראים את המספרים הבינאריים שמופיעים (שהם רצפים כלשהם של הספרות) עם כיוון השעון.
6. מלבן יקרא שלם אם אחת מצלעותיו באורך שלם. נתון מלבן שמחולק למלבנים שלמים. הוכיחו שגם הוא מלבן שלם.
7. יהי p ראשוני ויהיו $a_1, a_2, \dots a_p$ מספרים שלמים. הוכיחו שקיים k שלם כך שבסדרה:
$$a_1+k, a_2+2k, \dots, a_p+pk$$
מופיעות לפחות $\left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil$ שאריות שונות מודולו p.

2018 USAJMO, Q5

8. מצאו את המספר הטבעי k המקסימלי עם התכונה הבאה: קבוצת המספרים הטבעיים ניתנת לפיצול ל k תתי קבוצות $A_1, \dots, A_k$ כך שלכל $n \geq 15$ ולכל $1 \leq i \leq k$ קיימים שני מספרים שונים ב A_i שסכומם n.

Shortlist 2011, C4

9. נתונות $4n$ משקולות במשקלים $1,2, \dots, 4n$. צבעו את המשקולות ב n צבעים, לכל צבע יש ארבע משקולות בדיוק שצבועות בו. הוכיחו כי ניתן לחלק את המשקולות לשתי קבוצות שוות משקל, כך שבכל קבוצה יהיו שתי משקולות מכל צבע.

2020 IMO, Q6

10. *יהי n מספר חיובי. קבעו מהו ה k החיובי הקטן ביותר, עם התכונה הבאה: אפשר לסמן k תאים על לוח $2n \times 2n$, כך שקיים כיסוי יחיד של הלוח על ידי אבני דומינו, שאף אחת מהן לא מכסה שני תאים מסומנים.

Shortlist 2016, C8

11. **יהי N שריג נקודות שלמות k ממדי, שמידותיו הן $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k$ (הכוונה לכמות הנקודות השלמות שהוא מכיל בכל כיוון, ולא לאורך בכל כיוון). תת שריג של השריג הינו קבוצה מהצורה:

$$\left\{(b_1, \ldots, b_k) \middle| b_{i_j} = x_{i_j}\right\}$$

כאשר $I = \{i_1, \ldots, i_l\}$ היא תת קבוצה של $\{1, \ldots, k\}$, וה x_{i_j} הם מספרים שלמים ספציפיים.

נאמר לתת שריג מאונך לקואורדינאטה i אם $i \in I$, ואחרת נאמר שהוא מקביל לה.

נניח שהשריג מכוסה על ידי תתי שריגים $L_1, \ldots, L_s$ כך ש:

1) כל תת שריג מכיל לפחות נקודה אחת שלא מוכלת באף תת שריג אחר
2) לכל קואורדינאטה קיים לפחות תת שריג אחד שמאונך לה

הוכיחו כי:

$$s \geq 1 + \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)$$

תת בעיה של shortlist 2010, C7