

יוצאים לטיול

בתרגיל זה כל הגרפים פשוטים ולא מכוונים, הילוך אינו חוזר על קשתות ומסלול אינו חוזר על קודקודים. אורך הילוך/מסלול הוא מספר הקשתות בו.

מתרחקים מהבית

1. בגרף על n קודקודים יש m קשתות ממוספרות. הוכיחו כי קיים בו הילוך מונוטוני (לפי מספור הקשתות) שאורכו לפחות $\frac{2m}{n}$.
2. בגרף על n קודקודים, נתון מספר טבעי k עבורו לכל שתי קבוצות זרות של k קודקודים ($1 \leq k \leq \frac{n}{2}$) יש לפחות קשת אחת ביניהן. הוכיחו כי קיים בגרף מסלול שאורכו לפחות $n - 2k$. האם בהכרח קיים מסלול ארוך יותר? ואולי אפילו ארוך יותר (כאן תניחו בנוסף כי $1 < k < \frac{n}{2}$)?
3. את הקשתות של גרף מלא על n קודקודים צבעו בשני צבעים. הוכיחו כי קיים מסלול מונוכרומטי שאורכו לפחות $\frac{n}{2}$.

המילטון מצטרף

- נסמן באות A את הכמות המינימלית של קודקודים שצריך להסיר כדי להפוך את הגרף ללא קשיר, ובאות α את הגודל המקסימלי של אנטי-קליקה בגרף.
4. בגרף על n קודקודים, לכל שני קודקודים $u \neq v$ מתקיים $\deg(u) + \deg(v) \geq n$. הוכיחו שקיים בגרף מעגל המילטון (מעגל שמבקר בכל קודקוד פעם אחת).
 5. **א.** לכל זוג קבוצות A, B של קודקודים בגרף נתון, נסמן ב- $s(A, B)$ את הגודל של קבוצה מינימלית של קודקודים שאחרי הסרתם אין מסלולים בין A ל- B בגרף (כאשר קודקוד בודד מהקבוצה $A \cap B$ נחשב מסלול). הוכיחו כי ניתן למצוא $s(A, B)$ מסלולים זרים בקודקודים בין A ל- B , שלאף אחד מהם אין קודקוד פנימי מתוך $A \cup B$.
 6. **ב.** הסיקו כי עבור כל זוג קבוצות A, B של קודקודים מהגרף, שמקיימות $|A|, |B| \geq k$, ניתן למצוא k מסלולים זרים בקודקודים בין A ל- B .
 6. **א.** נתון גרף עבורו $\alpha \geq k$. הוכיחו כי קיים בו מעגל המילטון (היעזרו בשאלה 5).
 6. **ב.** מצאו קריטריון דומה לקיום מסלול המילטון בגרף.
 6. **ג.** מצאו קריטריון דומה לקשירות המילטונית (שבין כל שני קודקודים שונים בגרף יש מסלול המילטון שמחבר ביניהם).
 6. **ד.** מצאו דוגמאות שמוכיחות שהקריטריונים בסעיפים הקודמים הדוקים.

מתחילים לשחק

- כשאיילה וברווז משחקים על קבוצה, איילה מתחילה, ובתורה בוחרת איבר שעוד לא נצבע וצובעת אותו בצבע אדום. ברווז בתורו בוחר איבר שעוד לא נצבע וצובע אותו בצבע כחול.
7. איילה וברווז משחקים על קבוצה, ונתון אוסף F של תתי קבוצות שלה. איילה מנצחת אם קיימת $A \in F$ שצבועה כולה באדום. הוכיחו כי אם $\sum_{A \in F} 2^{-|A|} < \frac{1}{2}$ אז ברווז יכול למנוע מאיילה לנצח.
 8. איילה וברווז משחקים על קבוצה, ונתון אוסף F של תתי קבוצות שלה, שכולן בגודל k , וכל שתיים מהן מכילות לכל היותר איבר אחד משותף. איילה מנצחת אם קיימת $A \in F$ שצבועה כולה באדום. הוכיחו כי ברווז יכול למנוע מאיילה לנצח במהלך $2^{(k-1)/2}$ מהלכים הראשונים שלה.
 9. איילה וברווז משחקים משחק על הקשתות של גרף דו צדדי מלא על 1998 קודקודים (999 קודקודים בכל צד). איילה מנצחת אם קיים זיווג מושלם של הגרף שצבוע כולו באדום. הוכיחו כי איילה יכולה לנצח תוך 1000 מהלכים לכל היותר.
 10. **א.** נתון מספר טבעי $4 \leq k$. איילה וברווז משחקים משחק על הקשתות של גרף מלא על n קודקודים, כאשר $k \ll n$. איילה מנצחת אם יש מעגל באורך k שצבוע כולו באדום. תוך כמה מהלכים איילה יכולה להבטיח ניצחון?
ב. על אותו לוח, עכשיו מנצחת הלותרה הראשונה שיוצרת מעגל באורך k שצבוע כולו בצבע שלה. תוך כמה מהלכים איילה יכולה להבטיח ניצחון (שכנעו את עצמכם קודם שעבור n גדול מספיק היא מנצחת)?

בתיאבון!