**אי שוויונים פונקציונליים**

זן זה של משוואות פונקציונליות הוא מאוד "נדיר" ומוזר. בדרך כלל לא יהיו שימושים בחח"ע, על, ודברים "מתקדמים" אחרים, אלא יותר משחק רב עם נוסחאות והצבות. עדיין כדאי מאוד לגשת לבעיות אלו באופן חכם- ולא סתם ע"י משחק עם הצבות אקראיות מתוך תקווה לנס.

**טיפים:**

- נסו להסיק לגבי מונוטוניות הפונקציה
- אם ברצונכם, לדוגמא, להראות ש $f(x) = x^2$, נסו להוכיח ש $f(x) \leq x^2$ וש $f(x) \geq x^2$
- תנו פרשנות גיאומטרית לאי שוויונים. לדוגמא: "השיפוע בין $\left(x, f(x)\right)$ ל $\left(y, f(y)\right)$ גדול מהשיפוע בין $\left(x-1, f(x-1)\right)$ ל $\left(y+1, f(y+1)\right)$". לפעמים זה עוזר מאוד להבין דברים חזקים על הפונקציה ואיך להתקדם, כשבלי הפרשנות הגיאומטרית הדבר נראה כמו גיבוב משוואות שבנס הצליח לפתור את השאלה.
- בחלק מהשאלות צריך להוכיח דבר מה על $f$, ולא למצוא את כל הפתרונות האפשריים. לכן, כדאי לנסות למצוא כל מני משפחות של פתרונות, כדי להבין מה אתם רוצים להוכיח שהפונקציה מקיימת.
- ברוח הטיפ הקודם, להוכיח שקבוצת פתרונות מסוימת הינה כל הפתרונות זו משימה קשה במיוחד עבור אי שוויונים פונקציונליים. כשמבקשים מכם דבר כזה, בסיכוי טוב אין פתרון למשוואה.
- הבדילו בין אי שוויונים פונקציונליים ב $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ל $\mathbb{R}$. הראשונים הם קבוצות בדידות וניתן להשתמש בהם ברעיונות כמו אינדוקציה. בממשיים, כמובן שעדיין עוזר לדעת דברים חזקים על הערכים של הפונקציה בשלמים, אבל זה כמעט תמיד לא מספיק.
- כשמבקשים מכם להוכיח שתכונה כלשהי של הפונקציה בהכרח מתקיימת, לעיתים יש להניח ההפך- ולנסות להגיע לסתירה (עובד בכל משוואה פונקציונלית, ובפרט שימושי באי שוויונים פונקציונליים).
- בהרבה מהאי שוויונים אחד האגפים הינו $f(x+y)$. בדרך כלל מדובר בפתח להוכחה על מונוטוניות הפונקציה, או להתעסקות עם תנאים ש"מזכירים קמירות" (בפרט כשיש תנאים דומים לחצי קמירות, עם $f\left(\frac{x+y}{2}\right)$).

1. תהי $f: [0,1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ שמקיימת $f(1) = 1$ ו $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ לכל $0 \leq x, y, x+y \leq 1$. מצאו את ה $c$ המינימלי כך ש $f(x) \leq cx$ לכל $0 \leq x \leq 1$.

USAMO 1993 Q3

(לא להיבהל, זאת לא השאלה האחרונה ביום הראשון, זאת השאלה השלישית מתוך חמש ביום אחד)

2. תהי $f: \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$ כך ש:

א. $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2)}{2}$

ב. $f(0,0) < 0$

ג. $f(x,y) > 1$ לכל $x^2 + y^2 > 100$

הראו שקיים רציונלי חיובי $b$ כך ש $f(x,y) \geq b\sqrt{x^2+y^2} - \frac{1}{b}$

גיליס תשע"ז, שאלה 6

3. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ שמקיימות:

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + |x-y|$$

USAMO 2000 Q1

(כאן זה כבר מתי שהם התישרו עם שאר העולם והשאלון שלהם מורכב משלוש שאלות כל יום, שני ימים)

4. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ כך ש $\left(f(x)\right)^2 \geq f(x+y)\left(f(x)+y\right)$

Bulgaria 1998

5. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{Q}_{>0}\to\mathbb{R}$ כך ש:
   א. $f(x)f(y)\geq f(xy)$
   ב. $f(x+y)\geq f(x)+f(y)$
   ג. קיים $a>1$ כך ש $f(a)=a$

IMO 2013 Q5

6. נתונה פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ כך ש $f(m+n)\geq f(m)+f\big(f(n)\big)-1$. מצאו את כל הערכים האפשריים של $f(2007)$.

Shortlist 2007 A2

7. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה שמקיימת $f(x+y)\leq yf(x)+f\big(f(x)\big)$. מצאו את כל ה $x$ הממשיים עבורם בהכרח $f(x)=0$

הרחבה קטנטנה של IMO 2011 Q3 (לא לפחד!)

8. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה שמקיימת $f(x+y)\geq f(x)+yf\big(f(x)\big)$. הראו ש $f(0)\leq 0$.

IMC Day 2 Q5