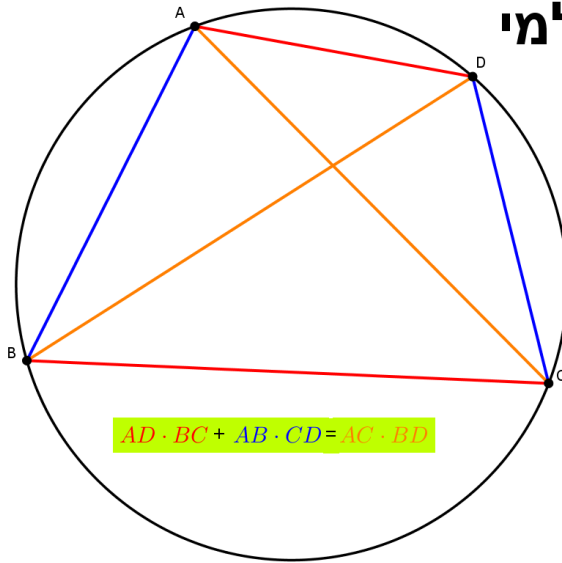
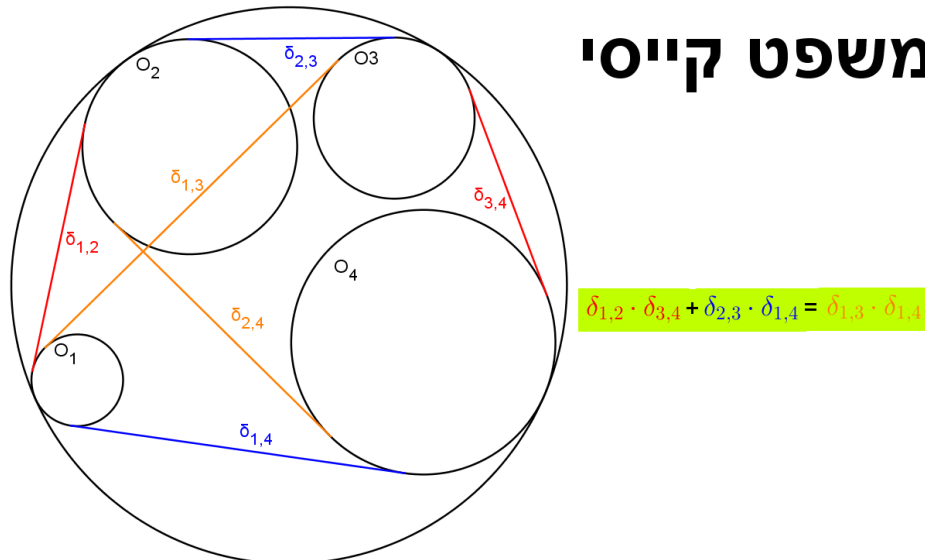


משפט תלמי



משפט קייסי



1. נתון משולש שווה שוקיים, $AB = AC$. המעגל ω משיק לצלע BC ולקשת \widehat{BC} (שלא מכילה את A) של המעגל החוסם של ABC . משיק מ- A ל- ω משיק בנקודה P . מצאו את המקום הגיאומטרי של הנקודות P .
2. נתון מעגל ω עם קוטר AB ושתי נקודות P, Q על המעגל כך ש- P, Q נמצאות בצדדים שונים של הישר AB . עקב האנך מ- P ל- AB יסומן R . אורכי המשיקים מ- Q למעגלים עם קטרים AR, BR יסומנו a, b . הוכיחו כי $a + b = PQ$.
3. אמצע הצלע BC של משולש ABC תסומן M . נסמן ב- ω_A את המעגל המשיק ל- BC ב- M ולקשת \widehat{BC} שלא מכילה את A . באופן דומה נגדיר את ω_B, ω_C . נסמן ב- δ_{BC} את אורך המשיק החיצוני המשותף של ω_B, ω_C . באופן דומה נגדיר את δ_{AB}, δ_{AC} . הוכיחו כי

$$\delta_{AB} = \delta_{BC} = \delta_{AC} = \frac{AB + BC + CA}{4}$$

4. (משפט פוירברך) הוכיחו כי המעגל החסום במשולש משיק למעגל תשע הנקודות. נקודת ההשקה נקראת נקודת פוירברך.

5. M, N, K הן אמצעי הצלעות BC, AC, AB במשולש ABC . F זו נקודת פוירברך. הוכיחו כי אחד מבין הקטעים FM, FN, FK שווה לסכום של השניים האחרים.

6. נתון מעגל ω שקוטרו AB . תהי C על ω ו- D עקב האנך מ- C ל- AB . על הקטע CD נבחרה הנקודה K כך ש- AC שווה לחצי מהיקף המשולש ADK . הוכיחו כי המעגל החסום מחוץ לקודקוד A במשולש ADK משיק ל- ω .

7. נתון משולש ישר זווית ABC , $\angle C = 90^\circ$, F היא עקב האנך מ- C ל- AB . נתון מעגל המשיק לקטעים CF, BF בנקודות Q, P ולמעגל החוסם של ABC . הוכיחו כי $AP = AC$.

8. מעגל ω משיק לצלעות AB, AC של משולש ABC בנקודות D, E . נתון מעגל Γ העובר בנקודות B, C ומשיק למעגל ω בנקודה F . אמצע הקשת BC שלא מכילה את F במעגל Γ תסומן S . הוכיחו כי BC, DE ו- SF נפגשים בנקודה.

9. נתונים שני מעגלים חופפים ω_1, ω_2 . ישר l חותך את ω_1 בנקודות A, C ואת ω_2 בנקודות B, D (A, B, C, D נמצאות על l בסדר זה). נתונים שני מעגלים נוספים Γ_1, Γ_2 כך ששניהם משיקים ל- l בנקודה P . שניהם משיקים ל- ω_1 מבפנים ול- ω_2 מבחוץ. הוכיחו כי $AB = CD$.

10. ω_A הוא המעגל החצי חסום במשולש ABC משיק לצעות AB, AC ולמעגל החוסם של ABC . אמצע הקשת BC שלא מכילה את A יסומן S . על ω_A נבחרה נקודה T כך ש- ST משיק ל- ω_A . הוכיחו כי

$$\frac{ST}{SA} = \frac{AC - AB}{AC + AB}$$

11. נתון משולש משוכלל ABC ונקודה P על המעגל החסום במשולש. ההיטלים מ- P לצלעות BC, AC, AB יסומנו P_1, P_2, P_3 . ω_1 הוא המעגל המשיק לקשת BC שלא מכילה את A של המעגל החוסם של ABC ול- BC ב- P_1 . באופן דומה נגדיר את ω_2, ω_3 . הוכיחו כי סכום אורכי שלושת המשיקים החיצוניים המשותפים בין המעלים $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ לא תלוי בבחירה של P .

12. נתון משולש ABC ונקודה P בתוכו. הצ'ביאנות דרך P חותכות את צלעות המשולש בנקודות D, E, F . נבנו שלושה מעגלים $\omega_D, \omega_E, \omega_F$ מחוץ למשולש כך שהם משיקים לצלעות המשולש בנקודות D, E, F ולמעגל החוסם של המשולש. בנוסף נבנה מעגל Γ המשיק ל- $\omega_D, \omega_E, \omega_F$ באופן חיצוני. הוכיחו כי Γ משיק למעגל החוסם במשולש.