שאלות

1. מצאו את כל הטבעיים $n \geq 2$ כך שלכל $0 \leq i,j \leq n$ ל $i+j$ ול $\binom{n}{i}+\binom{n}{j}$ יש את אותה הזוגיות.
2. יהי ω המעגל החוסם של ABC. נסמן בD את אמצע הקשת BAC ובI את מרכז המעגל החוסם. כמו-כן נסמן בE את חיתוך DI וBC ובF את החיתוך השני של DI עם ω. יהי P נקודה על AF כך שPE מקביל לAI. הוכיחו שPE הוא חוצה הזוית של BPC.
3. יהי n מספר טבעי ותהי S תת קבוצה של נקודות במישור כך ש:
   a. אין n ישרים במישור שמכסים את כל הנקודות בS.
   b. לכל נקודה בS קיימים n ישרים שמכסים את כל הנקודות בS חוץ ממנה.

   מה הגודל המקסימלי של $|S|$ (כתלות בn).
4. $m+1$ ישרים אופקיים ו$n+1$ ישרים אנכיים $(m,n \geq 4)$ יוצרים טבלה $m \times n$. נתון מסלול סגור שמורכב מקטעים מהישרים שמקיים:
   a. המסלול לא חותך את עצמו
   b. המסלול עובר בכל $(m-1)(n-1)$ הקודקודים הפנימיים
   c. המסלול לא עובר בקדקודים החיצוניים.

   נסמן בA את מספר הקודקדים שהלכו בהם ישר (כלומר לא עשו פנייה).
   בB את מספר התאים בטבלה שהמסלול עבר בשתי צלעות נגדיות שלהם (**ורק** בהן).
   בC את מספר התאים שהמסלול לא השתמש באף צלע שלהם.

   הוכיחו:

   $$A = B - C + m + n - 1$$

5. תהי $f: \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ פונקציה כך שלכל $a,b \in \mathbb{R}^{\geq 0}$:
   a. $f(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$
   b. $f(ab) = f(a)f(b)$
   c. $f(a+b) \leq 2\max\{f(a), f(b)\}$

   הוכיחו שלכל $a,b \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ מתקיים $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$
6. המחומש $ABCDE$ חסום במעגל w. נסמן בw_a, w_b, w_c, w_d, w_e את השיקופים שלו לפי הצלעות AB, BC, CD, DE, EA בהתאמה. תהי A' נקודת החיתוך השנייה של w_a, w_e ובאופן דומה נגדיר את B', C', D', E'. הוכיחו כי:

   $$2 \leq \frac{S_{A'B'C'D'E'}}{S_{ABCDE}} \leq 3$$

   כאשר S_X מסמן את שטח הצורה X.