מספרים שלמים

1. המספרים p ו-p^2+2 ראשוניים. מצאו את כל האפשרויות עבור p.

2. המספרים $p<q$ הם ראשוניים אי-זוגיים עוקבים (אין אף ראשוני בין p ל-q).
הראו כי $p+q$ ניתן להציג בתור $a\cdot b\cdot c$ כאשר $a,b,c>1$.

3. פתרו את מערכת המשוואות בשלמים: $\begin{cases} x+y-z=12 \\ x^2+y^2-z^2=12 \end{cases}$.

4. פתרו את המשוואה בשלמים חיוביים: $a^2+b^2=123454321$.

5. מצאו את כל הפתרונות בשלמים למשוואה: $a^2+b^2+c^2+d^2=7\cdot 4^{2014}$.

6. איזה סוג של מחלקים (לאו דווקא ראשוני) יש יותר למספר טבעי N כלשהו: מהסוג $4k+1$ או מהסוג $4k+3$? האם התשובה משתנה כאשר נתון ש-$N=a^2+b^2$?

7. א. הראו כי כמות הנקודות השלמות בתוך עיגול סגור שרדיוסו $\sqrt{x}$ ומרכזו נקודה שלמה שוה ל-$1+4\left(\lfloor x\rfloor-\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x}{5}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{x}{7}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x}{9}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{x}{11}\right\rfloor+\ldots\right)$.

ב. מצאו תיאור גיאומטרי דומה ל-

$$1+6\left(\lfloor x\rfloor-\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{x}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x}{7}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{x}{8}\right\rfloor+\ldots\right)$$

8. נניח כי a,b,c הם מספרים שלמים חיוביים. הוכיחו כי $(ab+1)(ac+1)(bc+1)$ הוא ריבוע שלם אם ורק אם $ab+1$, $bc+1$, $ca+1$ כולם ריבועים שלמים.