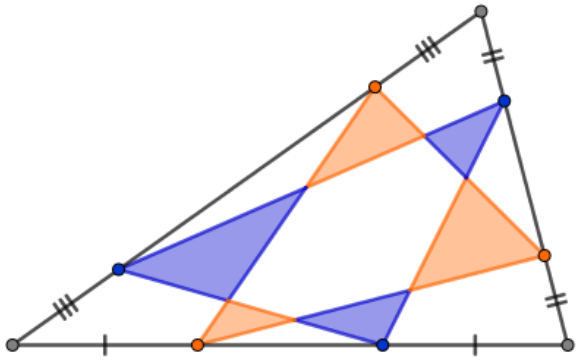
כ' בניסן תש"ף **פסח וירטואלי** 14/4/2020

תחרות קבוצתית

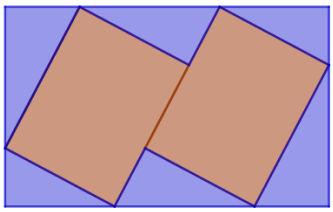
משך המבחן 3 שעות

אין להשתמש במחשבון



1. הראו כי סכום השטחים הכחולים שווה לסכום השטחים הכתומים.

2. איילה וברווז משחקים משחק. בתחילת המשחק רשומים על הלוח כל המספרים מ-1 עד n. בכל מהלך מוחקים שני מספרים שמכפלתם מתחלקת ב-4. משחקים בתורות, איילה מתחילה, מי שלא יכול לעשות מהלך מפסיד. לאיזו לוטרה יש אסטרטגיה מנצחת? התשובה תלויה ב-n ?



3. בציור שלושה מלבנים. צלעות המלבן הגדול הם 2 ו-3. שני המלבנים החומים דומים למלבן הגדול. מצאו את ההפרש בין השטח החום לכחול.

4. עבור m,n,k טבעיים נגדיר

$$S_{k,n,m}=\left\{\left(a_0,a_1,...,a_k\right)\middle|\sum_{i=0}^{k}a_i=n\ ,\ \sum_{i=0}^{k}i\cdot a_i=m\right\}.$$

נסמן $A_{k,n,m}=\sum_{\vec{a}\in S_{k,n,m}}\frac{n!}{a_0!\cdot a_1!\cdot...\cdot a_k!}\binom{k}{0}^{a_0}\binom{k}{1}^{a_1}\binom{k}{2}^{a_2}...\binom{k}{k}^{a_k}$.

הראו כי $A_{k,n,m}=A_{n,k,m}$.

5. ליובל יש הרבה חפיסות שוקולד בגודל 1×3. הוא מניח אותן על מגש ריבועי 8×8 לפי משבצות, בלי שיעלו זה על זה ובלי להזיז את החפיסות שכבר הונחו. ברגע שכבר לא ניתן לשים על המגש עוד חפיסה, הוא נותן את המגש לדורבן, ואת חפיסות השוקולד הנוספות שיש לו הוא אוכל בעצמו. יובל אוהב שוקולד, ומסוגל לאכול כמות בלתי מוגבלת של שוקולד.

א. האם דורבן בהכרח יקבל 8 חפיסות לפחות?

ב. האם דורבן בהכרח יקבל 11 חפיסות לפחות?

ג. האם דורבן בהכרח יקבל 14 חפיסות לפחות?

יש עוד עמוד!

6. נסמן ב-A את כמות רביעיות המספרים הטבעיים m,i,n,k עבורן מתקיים $m\cdot i+n\cdot k=5780$. נסמן ב-B את כמות חמישיות המספרים הטבעיים l,u,t,r,a כך ש-r חסר ריבועים, ובנוסף $l\cdot u\cdot t\cdot r+a=5780$. מה יותר גדול, A או B?

7. מספרים חיוביים c,b,a ו-d מקיימים
$2abcd+abc+abd+acd+bcd=a+b+c+d+2$.

הוכיחו כי $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\le\sqrt{2\left(a+b+c+d+4\right)}$.

8. על אליפסה Q נמצאות נקודות A, B, C, D. הגבהים של משולש ABC נפגשים בנקודה H. הישרים AH ו-BC נפגשים בנקודה A_1. מעגל DAA_1 פוגש את הישר DH שנית בנקודה D_1. האנך ל-DH דרך D_1 פוגש את Q בנקודות E ו-F. הראו כי H היא גם נקודת מפגש הגבהים של משולש DEF.

בהצלחה!