פולינומים!

1. נתונים $P(x), Q(x)$, פולינומים מתוקנים ממעלה 10. ידוע כי למשוואה $P(x) = Q(x)$ אין שורשים ממשיים. הוכיחו כי למשוואה $P(x+1) = Q(x-1)$ יש שורש ממשי.

פתרון: הרעיון המרכזי הוא שלפולינום ממעלה אי זוגית תמיד יש שורש.

ל-$P(x) = Q(x)$ אין שורשים ולכן המונום הגדול חייב להיות ממעלה זוגית כלומר המקדמים של x^9 ב-P וב-Q זהים.

כמובן ש-x^{10} מצטמצם במשוואה $P(x+1) = Q(x-1)$. נטען ש-x^9 לא מצטמצם. x^9 מגיע מ-$(x \pm 1)^{10}$ ומ-$a_9(x \pm 1)^9$ מהביטוי הראשון מקבלים $10x^9$ באגף ימין ו-$-10x^9$ באגף שמאל, שך הכל $20x^9$ ומהביטוי השני מבלים a_9x^9 כלומר שך הכל המקדם של x^9 במשוואה הוא 20 ולכן יש שורש.

2. נתון פולינום מתוקן עם מקדמים שלמים ממעלה 4 שיש לו ארבעה שורשים ממשיים חיוביים (כולל ריבוי). מצאו את הערך המינימלי של המקדם של x^2.

פתרון: נסמן ב-d_2 את המקדם x^2 וב-d_0 את המקדם החופשי. בנוסף נסמן ב-r_1, r_2, r_3, r_4 את שורשי הפולינום.

מנוסחאות וויאטה אנו יודעים ש-

$$d_2 = \sum_{i,j} r_i r_j \qquad d_o = r_1 r_2 r_3 r_4$$

$$\frac{d_2}{6} = \frac{\sum_{i,j} r_i r_j}{6} \geq \sqrt[6]{(r_1 r_2 r_3 r_4)^2} = \sqrt[3]{d_0} \geq 1$$

ולכן $d_2 \geq 6$. בשביל לקבל $d_2 = 6$ אי שוויון הממוצעים צריך להפוך לשוויון, כלומר כל השורשים צריכים להיות שווים ל-1 ואכן המקדם של x^2 בפולינום $(x-1)^4$ הוא 6.

3. נתונים מספרים ממשיים $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ו-$a_i \neq 0$ ומספר טבעי $n < m-1$. ידוע כי לכל $k = 0,1, \ldots, n$ מתקיים:

$$a_1 + a_2 \cdot 2^k + a_3 \cdot 3^k + \ldots + a_m \cdot m^k = 0$$

הוכיחו כי בסדרה $a_1, a_2, \ldots, a_m$ יש לפחות $n+1$ החלפות סימן.

פתרון: נשים לב שהתנאי בעצם אומר שלכל פולינום $P(x)$ ממעלה n לכל היותר מתקיים:

$$a_1 P(1) + a_2 P(2) + \ldots + a_m P(m) = 0$$

כעט נניח בשלילה שבסדרת ה-a-ים יש לכל היותר n החלפות סימן ונבחר את P כך שהוא יחליף סימנים בדיוק כאשר a מחליף סימנים, ניתן לעשות זאת על ידי בחירת פולינום שמתאפס בין כל שני a-ים שסימנם שונה, כלומר P הוא מכפלה של ביטויים מהצורה $\left(x - a_i + \frac{1}{2}\right)$ כאשר a_i ו-a_{i+1} מסימנים שונים.

עכשיו כל האיברים בביטוי

$$a_1 P(1) + a_2 P(2) + \ldots + a_m P(m) = 0$$

מאותו סימן ולכן הוא לא יכול להיות 0 בסטירה.

שימו לב שהצלחנו לבחור P כפי שרצינו בגלל שהיה מעט החלפות סימן ברגע שיהיו $n+1$ החלפות סימן המעלה של P תצטרך להיות $n+1$ גם היא אבל לפולינומים אלו התנאי של סכום 0 לא מתקיים.

4. נתונים שני פולינומים P, Q עם מקדמים שלמים אי שליליים. M הוא ערכו של המקדם הגדול ביותר ב-P. התברר כי קיימים שני טבעיים $a < b$ עבורם $P(a) = Q(a)$ ו-$P(b) = Q(b)$. הוכיחו כי אם $b > M$ אז $P(x) = Q(x)$.

פתרון: נסמן $P(x) = c_0 + c_1x + \dots c_nx^n$ ו-$Q(x) = d_o + d_1x + \dots d_mx^m$. נרשום הכל בבסיס b. b גדול מכל המקדמים של P ולכן הרישום של $P(b)$ הוא פשוט $\overline{c_n c_{n-1} \dots c_0}$. אם b גדול גם מכל המקדמים של Q אז הרישום של $Q(b)$ יהיה $\overline{d_m d_{m-1} \dots d_0}$ אבל $P(b) = Q(b)$ ולכן כל המקדמים צריכים להיות שווים ולכן גם הפולינומים שווים.

עכשיו נניח של-Q יש מקדמים שגדולים מ-b ונניח ש-d_i הוא הראשון מבניהם (הזה עם האינדקס הקטן), נסמן $d_i = bz + y$, "נעביר" את x למקדם הבא, כלומר נגדיר פולינום חדש Q_1 שבו המקדם של x^i הוא y והמקדם של x^{i+1} הוא $z + d_{i+1}$ ושאר המקדמים כמו ב-Q. ברור גם ש-$Q_1(b) = Q(b)$ כי כך בנינו את Q_1.

נמשיך כך, בכל שלב נקח את המקדם הכי קטן שגדול מ-b ונקטין אותו ובתמורה נגדיל את המקדם הבא, בסופו של דבר נקבל פולינום Q' שכל המקדמים שלו קטנים מ-b וש-$Q'(b) = Q(b)$ כפי שכבר הסברנו מקודם $Q' = P$ מכיוון שכל המקדמים שווים ובפרט מתקיים ש-$Q'(a) = P(a) = Q(a)$.

כעט נשים לב ש-

$$Q(a) - Q_1(a) = d_ia^i + d_{i+1}a^{i+1} - ya^i - (z + d_{i+1})a^{i+1}$$
$$= bza^i - za^{i+1} = za^i \cdot (b - a) > 0$$

כלומר כל פעם שהחלפנו את הפולינום שלנו הקטנו את הערך שלו ב-a ולכן $Q'(a) < Q(a)$ בסתירה לכך שהוכחנו ש-$Q'(a) = Q(a)$.

5. נתון פולינום $P(x)$ עבורו מתקיים ש-$P(0)=1$ וש- $P(x)^2=1+x+x^{100}\cdot Q(x)$ כאשר $Q(x)$ פולינום. הוכיחו כי בפולינום $(P(x)+1)^{100}$ המקדם של x^{99} שווה ל-0.

פתרון: נסתכל על הכל מודולו x^{100}: $P(x)^2\equiv 1+x$. לפי בינום:

$$(P(x)+1)^{100}=\sum_{i=0}^{100}\binom{100}{i}P(x)^i$$

את המחוברים עם החזקות הזוגיות אנחנו מבינים טוב אבל את החזקות האי-זוגיות מבינים פחות טוב ולכן נסתכל על הפולינום:

$$(P(x)+1)^{100}+(P(x)-1)^{100}$$
$$=2\sum_{i=0}^{50}\binom{100}{2i}P(x)^{2i}\equiv 2\sum_{i=0}^{50}\binom{100}{2i}(1+x)^{2i}$$

כלומר מודולו x^{100} זה פולינום ממעלה 50 ובפרט המקדם של x^{99} הוא 0.

כלומר בשביל להוכיח שהמקדם של x^{99} ב-$(P(x)+1)^{100}$ הוא 0 מספיק להוכיח שהמקדם של x^{99} ב-$(P(x)-1)^{100}$ הוא 0.

אבל $P(x)-1=x+x^{100}Q(x)$ כלומר מתחלק ב-x ולכן $(P(x)-1)^{100}$ מתחלק ב-x^{100} ולכן אין לו מקדם של x^{99}.

6. על הלוח רשום פולינום $P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$, נתון ש-$P(x)$ יש לפחות שורש ממשי אחד ו-$a_0\neq 0$. הוכיחו כי ניתן למחוק ל-$P(x)$ מונום אחד כל דקה כך שכעבור n דקות על הלוח יהיה רשום a_0 ובכל רגע נתון על הלוח יהיה רשום פולינום שיש לו לפחות שורש ממשי אחד.

פתרון: האבחנה המרכזית היא שלכל פולינום ממעלה אי-זוגית יש שורש ממשי.

אם n אי-זוגי אז בכל שלב נמחק מונום שהוא לא המונום המוביל ולכן בכל שלב יהיה שורש.

עכשיו נניח ש-n זוגי. אם המונום השני בגודלו (שהמקדם שלו שונה מ-0) אי-זוגי אז נמחק את $a_n x^n$ ונקבל פולינום ממעלה אי-זוגית ואת זה כבר פתרנו.

בלי הכבל הכלליות נניח ש-$a_n > 0$. אם המקדם החופשי קטן מ-0 אז כל פעם נוכל למחוק מונום אמצעי (כזה שהוא לא המוביל ולא החופשי) ותמיד ישאר שורש.

אם המקדם החופשי חיובי גם הוא אז נסתכל על המקדם של המונום השני: $a_m x^m$, אם a_m שלילי אז נמחק את $a_n x^n$ ונקבל פולינום שהמקדם החופשי שלו חיובי, הוא ממעלה זוגית והמקדם המוביל שלילי, זה מקרה שכבר טיפלנו בו.

אם a_m חיובי אז נמחק את המונום הזה ונשים לב שאם לפולינום שלנו היה שורש ב-r אז הפולינום החדש שלישי ב-r מכיוון שהחסרנו ממנו $a_m r^m$ והנחנו ש-a_m חיובי ו-m זוגי, ואילו מצד שני הפולינום החדש עדיין שואף לאינסוף ב-x-ים גדולים (כי הנחנו ש-n זוגי) ולכן חייב להיות לו שורש.

7. נתונים שני פולינומים עם מקדמים שלמים $P(x), Q(x)$ כך שהמעלה של P גדולה מהמעלה של Q. ידוע שעבור אינסוף ראשוניים p לפולינום $pP(x) + Q(x)$ יש שורש רציונלי. הוכיחו כי גם ל-$P(x)$ יש שורש רציונלי.

פתרון: נתחיל מלשים לב שהשורשים של $pP(x) + Q(x)$ חסומים, זאת מפני שעבור x גדולים בערכם המוחלט $|P|$ גדול מ-$|Q|$ ו-P עוד מוכפל ב-p אז בכלל.

לפי הלמה של גאוס $pP(x) + Q(x)$ מתפרק לגורמים מעל השלמים, אחד הגורמים לינארי והשני ממעלה $degP - 1$. בנוסף המקדם המוביל

של אחד הגורמים הוא כפולה של p והמקדם המוביל של הגורם השני מחלק את המקדם המוביל של P, נסמן את הגורם הזה ב-R_p.

נשים לב שיש כמות סופית של אפשרויות לדרגה של R_p (שתי אופציות) וכמות סופית של אפשרויות למקדם המוביל של R_p ולכן ניתן להניח שעבור אינסוף ראשוניים ל-R_p יש את אותה הדרגה ואותו מקדם מוביל.

כפי שאמרנו השורשים של $pP(x)+Q(x)$ ובעצם זה נכון גם לשורשים המרוכבים, כלומר השורשים המרוכבים של $pP(x)+Q(x)$, ולכן גם של R_p, נמצאים בדיסק $|z|\le r$. כעט נשים לב שמנוסחאות ויאטה אנו מקבלים שגם המקדמים של R_p חסומים, אבל המקדמים של R_p שלמים ולכן ל-R_p יש כמות סופית של אפשרויות, כלומר עבור אינסוף ראשוניים שונים R_p-ים שלהם זהים.

ועכשיו כבר קל לסיים, נבחר שני ראשוניים שונים p,q כך ש-$R_p=R_q$.

נזכר ש-$R_p|pP(x)+Q(x)$ ו-$R_q|qP(x)+Q(x)$ ולכן

$R_p|(p-q)P(x)$ אבל הדרגה של R_p היא 1 או $degP-1$ ובשני המקרים מקבלים של-$P(x)$ יש שורש רציונלי.

8. מצאו את כל הפולינומים $P(x)$ עבורם לכל $|x|\le 1$ מתקיים:

$$P\left(\sqrt{2}x\right)=P\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)$$

פתרון: ברור שאפשר להזיז את P בקבוע וכלום לא ישתנה ולכן נניח ש-$P(0)=0$.

כמה הצבות של מספרים:

$$x=0;\ \ P(0)=P(1)$$

ולכן גם $P(1)=0$.

$$x=1;P\left(\sqrt{2}\right)=P(1)=0$$

$$x=-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \ P(-1)=P\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{1-\frac{1}{2}}\right)=P(0)=0$$

$$x=-1;\ \ \ P\left(-\sqrt{2}\right)=P(-1)=0$$

סך הכל קיבלנו שהפולינום שלנו מתחלק ב-$x(x-1)(x+1)(x^2-2)$ שזה כבר טוב, בשלב זה אפשר להמשיך להרביץ אבל אנו נשתמש בטריק מגניב; נגזור את המשוואה!

$$\sqrt{2}P'\left(x\sqrt{2}\right)=\left(1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)P'\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)$$

ועכשיו מספר הצבות. נתחיל מלאפס את אגף ימין, כלומר נחפש x כך ש-$1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0$ כלומר $x^2=\frac{1}{2}$ נתחיל מ-$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ונקבל ש-

$$P'(1)=0$$

מההצבה $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ נקבל דווקא ש-$P'(-1)=0$.

עכשיו נציב $x=0$ ונקבל

$$\sqrt{2}P'(0)=P'(1)=0$$

סך הכל קיבלנו ש-P מתאפס ב-$0,1,-1$ וגם P' מתאפס שם ולכן P מתחלק ב-$Q(x)=x^2(x-1)^2(x+1)^2(x^2-2)$.

צריך להציב ולבדוק שפולינום זה אכן מקיים את המשוואה, אנחנו נשאיר את הבדיקה לקורא. בנוסף קל לראות שכל פולינום ב-Q מקיים גם הוא את המשוואה. נטען שאלו בעצם כל הפתרונות.

יהיה $R(x)$ פולינום המקיים את המשוואה, לאחר הזזה בקבוע הוא יתחלק ב-Q, נחלק אותו ב-Q ונסמן ב-$R'(x)$ את המנה. ברור שגם $R'(x)$ מקיים את המשוואה ולכן נוכל שוב להזיז את $R'(x)$ בקבוע ועכשיו הוא שוב יתחלק ב-Q, נמשיך את התהליך עד שנגיע לפולינום ה-0.