פולינומים!

1. נתונים $P(x), Q(x)$, פולינומים מתוקנים ממעלה 10. ידוע כי למשוואה $P(x) = Q(x)$ אין שורשים ממשיים. הוכיחו כי למשוואה $P(x+1) = Q(x-1)$ יש שורש ממשי.
2. נתון פולינום מתוקן עם מקדמים שלמים ממעלה 4 שיש לו ארבעה שורשים ממשיים חיוביים (כולל ריבוי). מצאו את הערך המינימלי של המקדם של x^2.
3. נתונים מספרים ממשיים $a_1, a_2, \dots, a_m$ ו-$a_i \neq 0$ ומספר טבעי $n < m-1$. ידוע כי לכל $k = 0,1, \dots, n$ מתקיים:

$$a_1 + a_2 \cdot 2^k + a_3 \cdot 3^k + \dots + a_m \cdot m^k = 0$$

הוכיחו כי בסדרה $a_1, a_2, \dots, a_m$ יש לפחות $n+1$ החלפות סימן.
4. נתונים שני פולינומים P, Q עם מקדמים שלמים אי שליליים. M הוא ערכו של המקדם הגדול ביותר ב-P. התברר כי קיימים שני טבעיים $a < b$ עבורם $P(a) = Q(a)$ ו-$P(b) = Q(b)$. הוכיחו כי אם $b > M$ אז $P(x) = Q(x)$.
5. נתון פולינום $P(x)$ עבורו מתקיים ש-$P(0) = 1$ וש-$P(x)^2 = 1 + x + x^{100} \cdot Q(x)$ כאשר $Q(x)$ פולינום. הוכיחו כי בפולינום $(P(x)+1)^{100}$ המקדם של x^{99} שווה ל-0.
6. על הלוח רשום פולינום $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, נתון של-$P(x)$ יש לפחות שורש ממשי אחד וש-$a_0 \neq 0$. הוכיחו כי ניתן למחוק ל-$P(x)$ מונום אחד כל דקה כך שכעבור n דקות על הלוח יהיה רשום a_0 ובכל רגע נתון על הלוח יהיה רשום פולינום שיש לו לפחות שורש ממשי אחד.
7. נתונים שני פולינומים עם מקדמים שלמים $P(x), Q(x)$ כך שהמעלה של P גדולה מהמעלה של Q. ידוע שעבור אינסוף ראשוניים p לפולינום $pP(x) + Q(x)$ יש שורש רציונלי. הוכיחו כי גם ל-$P(x)$ יש שורש רציונלי.
8. מצאו את כל הפולינומים $P(x)$ עבורם לכל $|x| \leq 1$ מתקיים:

$$P\left(\sqrt{2}x\right) = P\left(x + \sqrt{1-x^2}\right)$$

בתאבון!