הדבר האמיתי!

1. נתונים שני מעגלים ω_1, ω_2 עם מרכזים O_1, O_2 הנחתכים ב-A, B. המשיק ל-ω_1 ב-A חותך שנית את ω_2 ב-C והמשיק ל-ω_2 ב-A חותך שנית את ω_1 ב-D. חוצי הזוויות של $\angle ABC, \angle ABD$ חותכים את ω_2, ω_1 ב-X, Y בהתאמה. מרכז המעגל החוסם של BCD יסומן P ומרכז המעגל החוסם של BXY יסומן Q. הוכיחו כי PQ הוא האנך האמצעי של O_1O_2.

2. נתון משולש ABC ו-I_A מרכז המעגל החסום מבחוץ מול A. ההטלות של B, C לחוצי הזוויות של $\angle ABC, \angle ACB$ יסומנו X, Y בהתאמה. נקודת החיתוך השנייה של המעגלים I_ABX, I_ACY תסומן P. מרכז המעגל החסום ב-PXY יסומן J. הוכיחו כי הזוויות $\angle BJC$ ישרה.

3. נתון משולש ABC ונקודות E, F על AC, AB כך ש-$BF = CE$. על המעגל החוסם של ABE נבחרה נקודה X כך ש-$CF||XE$ ובאופן דומה על המעגל החוסם של ACF נבחרה נקודה Y כך ש-$BE||YF$. הוכיחו כי כאשר E, F זזות על הצלעות המתאימות המעגל החוסם של AXY עובר בנקודה קבועה השונה מ-A.

4. נתון משולש ABC ו-M מפגש התיכונים שלו. הישרים AM, BM, CM חותכים שנית את המעגל החוסם של ABC בנקודות P, Q, R. יהיו D, E, F עקבי הגבהים מ-A, B, C. הוכיחו שהמרכז הרדיקלי של DQR, EPR, FPQ נמצא על ישר אוילר של ABC.

5. נתון משולש ABC, I מרכז המעגל החסום ו-P נקודה בתוך המשולש. יהיו D, E, F ההטלות של P על BC, AC, AB. על הקרניים DB, DC, EC, EA, FA, FB נבחרו הנקודות M, N, X, Y, U, V כך שמתקיים: $DM = DN = EX = EY = FU = FV$.

ההטלות של P על AI, BI, CI יסומנו R, S, T בהתאמה. הוכיחו שמפגש הגבהים של RST נמצא על הציר הרדיקלי של המעגלים MXU ו-NYV.

בתאבון!