סוכמים ספרות!

סכום הספרות של מספר טבעי n יסומן ב-$s(n)$

1. חשבו את $s(s(s(4444^{4444})))$.

2. חשבו את $s((10^1-1)\cdot(10^2-1)\cdot\ldots\cdot(10^{2^n}-1))$.

3. נתונים שני מספרים טבעיים m,k הוכיחו כי קיים מספר טבעי n כך ש-$m|n$ ו-$k|s(n)$.

4. א. הוכיחו שקיימים אינסוף n-ים כך שמתקיים $s(2^n)\geq s(2^{n+1})$.

ב. הוכיחו שקיימים אינסוף n-ים כך שמתקיים $s(3^n)\geq s(3^{n+1})$.

5. הוכיחו ש- $4^{s(2^n)}>n$.

6. מצאו את כל הפולינומים עם מקדמים שלמים $P(x)$ עבורם לכל n טבעי וגדול מ-2015 מתקיים ש-$P(n)>0$ ו-

$$P\big(s(n)\big)=s(P(n))$$

7. א. הוכיחו שקיימים אינסוף מספרים טבעיים a עבורם למשוואה

$n+f(n)=a$ אין פתרונות טבעיים.

ב. הוכיחו שקיימים אינסוף מספרים טבעיים a עבורם למשוואה

$n+f(n)=a$ יש לפחות שני פתרונות טבעיים שונים.

8. מספר טבעי n נקרא מגניב אם ניתן לייצג אותו כסכום של שני מספרים טבעיים a,b כך ש-$s(a)=s(b)$. חשבו את כמות המספרים המגניבים עד 10^{2005}.

9. תהיה A קבוצת המספרים השלמים שברישום העשרוני שלהם מופיעות רק הספרות 0 ו-1 והספרה 1 מופיע לכל היותר 1998 פעמים. הוכיחו שקיים מספר טבעי שכל המספרים ב-A לא מתחלקים בו.

בתאבון!