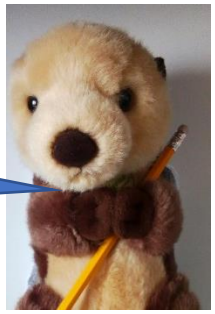
פונקציונלי זה חיובי!



1. $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+\ f\left(\frac{f(y)}{f(x)}+1\right)=f\left(x+\frac{y}{x}+1\right)-f(x)$

פתרון:

נניח בשלילה כי קיימים $a<b$ עבורם $f(a)=f(b)$.

אם $a+1<b$:

$$x=a;y=ab-a^2-a:f(\text{stuff})=f(b)-f(a)=0$$

(ההצבה חוקית כי $ab>a^2+a$) קיבלנו $f(\text{stuff})=0$, סתירה.

מצד שני, $f(a)=f(b)$ גורר $f(a+\frac{y}{a}+1)=f(b+\frac{y}{b}+1)$ לכל y, אבל עבור y, מאוד גדול, $a+\frac{y}{a}+1>b+\frac{y}{b}+1+1$, וראינו שזה גורר $f(a+\frac{y}{a}+1)\neq f(b+\frac{y}{b}+1)$, סתירה. לכן, f חח"ע.

$$x=y:\quad f(2)=f(x+2)-f(x)\implies f(2)+f(x)=f(x+2)$$

$$x=2:\quad f\left(\frac{f(y)}{f(2)}+1\right)=f\left(2+\frac{y}{2}+1\right)-f(2)$$

$$f\left(\frac{f(y)}{f(2)}+1\right)=f\left(\frac{y}{2}+1\right)\implies\frac{f(y)}{f(2)}+1=\frac{y}{2}+1$$

נסמן $C=\frac{f(2)}{2}$. אזי, הפתרון הוא: $f(y)=Cy$ לכל $C\in\mathbb{R}^+$. ■

2. $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \;\; f\big(x+f(y)\big)=yf(xy+1)$

פתרון: ננסה לצמצם את ה-f-ים ולכן נחפש x,y המקיימים את המשוואה: $x+f(y)=xy+1$ כלומר $x=\frac{1-f(y)}{1-y}$. לאחר שנציב את ה-x הזה נקבל $y=1$ ולכן ההצבה שעשינו לא חוקית כאשר $y\neq 1$ כלומר $\frac{1-f(y)}{1-y}\leq 0$ או במילים אחרות $y>1$ גורר $f(y)<1$ ו-$y<1$ גורר $f(y)>1$.

כעט נרצה שבאגף ימין יהיה $f(y)$ ולכן נציב $x=\frac{y-1}{y}$ ונקבל:

$$f\left(1-\frac{1}{y}+f(y)\right)=yf(y)$$

נשים לב שאם $f(y)>\frac{1}{y}$ אז אגף שמאל קטן מ-1 ולכן

$$f(y)<\frac{1}{y}$$

ובאותו אופן אם $f(y)<\frac{1}{y}$ אז אגף שמאל גדול מ-1 ולכן

$$f(y)>\frac{1}{y}$$

ולכן $f(y)=\frac{1}{y}$ אבל רק עבור $y>1$ כי ההצבה $x=\frac{y-1}{y}$ הייתה חוקית רק עבור $y>1$. אבל עכשיו נציב במשוואה המקורית $x>1$ ונקבל:

$$\frac{1}{x+f(y)}=f\big(x+f(y)\big)=yf(xy+1)=\frac{y}{xy+1}=\frac{1}{x+\frac{1}{y}}$$

ולכן $f(y)=\frac{1}{y}$ לכל y.

3. $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \;\; f\big(xf(y)\big)=f(x+y)$

4. $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ (z+1)f(x+y)=f(xf(z)+y)+f(yf(z)+x)$

6. $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+\ f\big(f(x)+xf(y)\big)=xy+f(x)$

$$x=1\ \ f\big(f(y)+f(1)\big)=y+f(1)$$

הפונקציה בברור חח"ע ועל אחל מ-$f(1)$. נחפש הצבה כך שבאגף ימין יהיה רק f של משהו. נציב $y=\frac{f(z)-f(x)}{x}$ ונקבל:

$$f\left(f(x)+xf\left(\frac{f(z)-f(x)}{x}\right)\right)=f(z)$$

ומחח"ע:

$$f(x)+xf\left(\frac{f(z)-f(x)}{x}\right)=z$$

נבחר $z=f(x)$ ונקבל ש-

$$xf\left(\frac{f\big(f(x)\big)-f(x)}{x}\right)=0$$

ולכן

$$f\big(f(x)\big)\le f(x)$$

או $f(x)\le x$ כאשר $x\ge f(1)$.

נבחר x גדול והמשוואה המקורית תהפוך ל-

(*) $\quad f(x)+xf(y)\ge f\big(f(x)+xf(y)\big)=xy+f(x)$

ולכן

$$f(y) \geq y$$

או

$$f(y) = y, \qquad y \geq a$$

ועכשיו אי-השוויון ב-(*) הופך לשוויון ונקבל $f(y) = y$ לכל y.

7. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(f(x)^2 - y^2)^2 + f(2xy)^2 = f(x^2 + y^2)^2$

פתרון: נציב $x = y$ ונקבל ש-

$$f(f(x)^2 - x^2) = 0$$

נשנה סימן ל-y ונקבל ש-$f(2xy)^2 = f(-2xy)^2$ או

$$f(y)^2 = f(-y)^2$$

נשים לב שאם נבחר x כך ש-$f(x) = 0$ ונציב אותו ב-

$f(f(x)^2 - x^2) = 0$ אז נקבל שגם $f(x^2) = 0$.

כעט נקבע את $x^2 + y^2$ להיות קבוע ש-f שלו הוא 0 ונקבל:

$$f(f(x)^2 - y^2)^2 + f(2xy)^2 = 0$$

סכום של שני ריבועים שווה 0 גורר שכל אחד מהם שווה 0 ולכן בפרט $f(2xy)=0$ אבל $2xy$ יכול לקבל כל ערך בין $-x^2-y^2$ ל-x^2+y^2 כלומר קיבלנו ש-$f(x)=0$ גורר ש-$f(y)=0$ לכל $-x\le y\le x$.

בנוסף נשים לב שאם יש $x>1$ כך ש-$f(x)=0$ אז אפשר להעלות את x הזה בריבוע ולקבל עוד ערך שהולך ל-0 ולכן לקבל ערכים גדולים כרצוננו שהולכים ל-0 ולכן הפונקציה קבוע 0.

נזכר ש-$f(f(x)^2-x^2)=0$ ונקבל ש-

$$-1\le f(x)^2-x^2\le 1$$

נשתמש באי-שווינים אלו על המשוואה המקורית ונקבל ש-

$$(f(x)^2-y^2)^2+4x^2y^2-2\le f(f(x)^2-y^2)^2+f(2xy)^2$$
$$=f(x^2+y^2)^2\le(x^2+y^2)^2+1$$

ולאחר צמצום:

$$f(x)^4-2f(x)^2y^2\le x^4-2x^2y^2+3$$

כלומר:

$$(f(x)^2-x^2)(f(x)^2+x^2-2y^2)\le 3$$

או במילים אחרות אפשר לראות זאת כפולינום ב-y

$$2(x^2-f(x)^2)y^2+\cdots\le 0$$

והמקדם המוביל חייב להיות שלילי ולכן נקבל ש-

$$f(x)^2 \geq x^2$$

אפשר לעשות אותו דבר בדיוק אך הפעם בכיוון ההפוך:

$$(f(x)^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 + 2 \geq f(f(x)^2 - y^2)^2 + f(2xy)^2$$

$$= f(x^2 + y^2)^2 \geq (x^2 + y^2)^2 - 1$$

ולכן

$$2(x^2 - f(x)^2)y^2 + \ldots \geq 0$$

והפעם המקדם המוביל חייב להיות חיובי ולכן

$$x^2 \geq f(x)^2$$

סך הכל קיבלנו ש- $f(x)^2 = x^2$ וזה פתרון למשוואה.

8. $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \;\; f\big(1 + xf(y)\big) = yf(x + y)$

פתרון: נציב $x = 1$ ונקבל

$$(*)\ \frac{f\big(1 + f(y)\big)}{y} = f(y + 1)$$

נשים לב שעוד דרך לקבל את $f(y + 1)$ אבל הפעם באגף שמאל זה להציב $x = \frac{y}{f(y)}$ ואז נקבל:

$$f(1 + y) = y \cdot f(y + \frac{y}{f(y)})$$

אבל אפשר לקבל את $f(1+y)$ בעוד דרך: נציב $(\frac{y}{f(y)},\frac{1}{y})$ ונקבל:

$$f(1+y)=\frac{1}{y}f\left(\frac{y}{f\left(\frac{1}{y}\right)}+\frac{1}{y}\right)=\frac{f\left(\frac{y^2+f(\frac{1}{y})}{yf(\frac{1}{y})}\right)}{y}$$

נשווה את המשוואה הזו עם (*) ונקבל ש-

$$(**)\ f\left(\frac{y^2+f(\frac{1}{y})}{yf(\frac{1}{y})}\right)=f\big(1+f(y)\big)$$

ועכשיו מאוד מפתה לקבל חח"ע.

אבל לפני זה נשים לב לעוד דבר מגניב שאפשר לעשות, אפשר לנסות להעיף את כל ה-f-ים במשוואה המקורית כלומר נחפש x כך ש-

$$1+xf(y)=x+y$$

ולכן

$$x=\frac{y-1}{f(y)-1}$$

מההצבה הזו נקבל $y=1$ שבכל מקרה אסור בהצבה כי חילקנו ב-$f(y)-1$ ולכן כל ההצבה שלנו הייתה לא חוקית כלומר כאשר y גדול מ-1 $f(y)$ קטן מ-1 וכאשר y קטן מ-1 $f(y)$ גדול מ-1.

כעט נראה שתי דרכים להוכיח שהפונקציה חח"ע.

דרך ראשונה:

נניח בשלילה שקיימים a,b כך ש- $f(a)=f(b)$ $a>b$ נציב את שניהם ב-y במשוואה המקורית ומכך שאגף שמאל לא משתנה נקבל:

$$af(x+a)=bf(x+b)$$

כלומר:

$$f\big(x+(a-b)\big)=\frac{b}{a}f(x)$$

נרצה להשתמש ב"מחזוריות" המוזרה ולכן נחפש x כך שיתקיים

$$1 + xf(y) = x + y + n(a - b)$$

ולכן נציב:

$$x = \frac{y - 1 + n(a - b)}{f(y) - 1}$$

ונקבל:

$$f\left(\frac{y - 1 + n(a - b)}{f(y) - 1} + y\right) * \left(\frac{b}{a}\right)^n = f\left(1 + \frac{y - 1 + n(a - b)}{f(y) - 1} f(y)\right)$$
$$= yf(\frac{y - 1 + n(a - b)}{f(y) - 1} + y)$$

כלומר $y = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ לכל n וזה שטות. רק נשים לב שההצבה $x = \frac{y-1+n(a-b)}{f(y)-1}$ חוקית כי אפשר לבחור $y < 1$ ואז $f(y) > 1$ והמונה חיובי ואז אפשר לבחור n גדול והמונה יצא חיובי גם הוא.

דרך שנייה:

כמו מקודם נקבל ש-

$$af(x + a) = bf(x + b)$$

עכשיו נציב $(ax, a + y)$ ונקבל ש-

$$f\big(1 + xaf(a + y)\big) = (a + y)f(ax + a + y)$$

ואם נציב $(ax, a + y)$ אז נקבל ש-

$$f\big(1 + xbf(b + y)\big) = (b + y)f(bx + b + y)$$

אגפי שמאל בשתי המשוואות האחרונות שווים ולכן גם אגפי ימין, כלומר

$$(b + y)f(bx + b + y) = (a + y)f(ax + a + y) \quad (\#)$$

נציב $x = y = 1$ ב-(#) האחרונה ונקבל ש-

$$(b + 1)f(2b + 1) = (a + 1)f(2a + 1)$$

כמו מקודם, נציב $(a + 1,2a + 1)$ ו-$(b + 1,2b + 1)$ במשוואה המקורית ושוב אגפי שמאל יהיו שווים ולכן גם אגפי ימין, כלומר

$$(2a+1)f(3a+2) = (2b+1)f(3b+2)$$

אם נציב $x = y = 2$ **ב-(#) נקבל ש-**

$$(b+2)f(3b+2) = (a+2)f(3a+2)$$

משתי המשוואות האחרונות נובע ש-

$$\frac{2a+1}{a+2} = \frac{2b+1}{b+2}$$

אבל הפונקציה $\frac{2x+1}{x+2} = 2 - \frac{3}{x+2}$ **מונוטונית בחיוביים ולכן** $a = b$.

נחזור ל-(**) ועכשיו מחח"ע זה הופך פשוט ל-

$$\frac{y^2 + f(\frac{1}{y})}{yf(\frac{1}{y})} = 1 + f(y)$$

ולכן

$$(***) \quad yf\left(\frac{1}{y}\right) + yf(y)f\left(\frac{1}{y}\right) = y^2 + f(\frac{1}{y})$$

כעט נטען ש-$yf(y) \leq 1$ **בשביל זה נציב** $(\epsilon, y-\epsilon)$ **ונקבל**

$$f\big(1 + \epsilon f(y-\epsilon)\big) = (y-\epsilon)f(y)$$

הדבר בתוך ה-f **באגף שמאל גדול מ-**1 **ולכן כל אגף שמאל קטן מ-**1 **ולכן** $(y-\epsilon)f(y) \leq 1$ **נשאיף את** ϵ **ל-**0 **ונקבל ש-**$yf(y) \leq 1$.

כעט מ-(***) נקבל ש-

$$y^2 + f\left(\frac{1}{y}\right) = yf\left(\frac{1}{y}\right) + yf(y)f\left(\frac{1}{y}\right) \leq yf\left(\frac{1}{y}\right) + f(\frac{1}{y})$$

ולכן $y^2 \leq yf(\frac{1}{y})$

כלומר $f(y) \geq \frac{1}{y}$ **וניצחנו!**