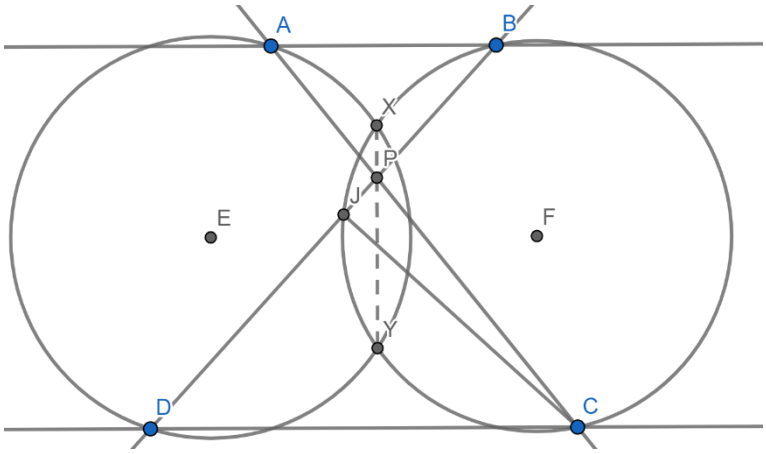
דרגה וציר!

1. נתון טרפז $ABCD$, $AB||CD$. המעגל עם קוטר AD חותך את המעגל עם קוטר BC בנקודות X,Y. P זה חיתוך האלכסונים בטרפז. הוכיחו כי P,X,Y נמצאות על ישר אחד.

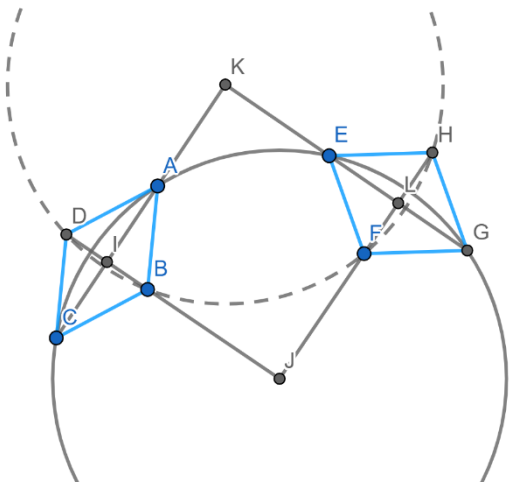
פתרון: רוצים להוכיח ש-P נמצאת על-XY כלומר שהיא על הציר הרדיקלי של שני המעגלים. לכן נרצה להראות שהדרגת נקודה שלה ביחס לשני המעגלים שווה:
בגלל ש-$ABCD$ טרפז מתקיים ש-$\Delta ABP \sim \Delta CDP$ ולכן מתקיים $AP \cdot DP = BP \cdot CP$. עכשיו נחשב את הדרגה של P ביחס למעגל שקוטרו BC



$$BP \cdot JP = BP \cdot CP\cos(\angle CPJ)$$
ולכן בבירור הדרגה שווה וניצחנו.

2. נתונים שני מעוינים$ABCD$ ו- $EFGH$ כך ש-$AB = EF$. נתון שהמרובע $ACEG$ חסום במעגל. הוכיחו כי גם המרובע $BDFH$ חסום במעגל.

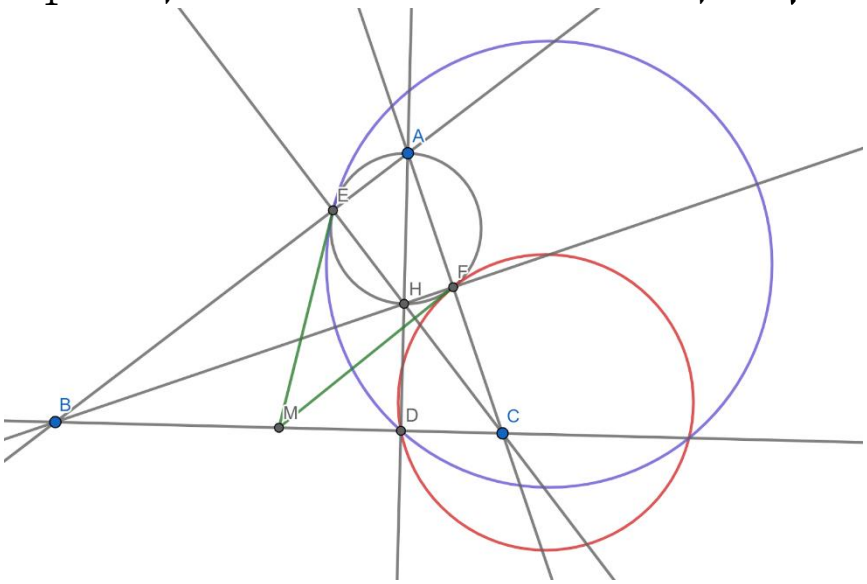
פתרון ראשון: רוצים להוכיח ש-$DBFH$ חסום ולכן נחשב דרגת נקודה מחיתוך הישרים DB, FH:
$$JB \cdot JD = JI^2 - IB^2 =$$
$$= JK^2 - IK^2 + IA^2 - AB^2$$
נשים לב ש- $JK^2 - AB^2$ לא תלוי במעויין וש-$IK^2 - IA^2$ זה דרגת הנקודה של K ביחס למעגל $ACEG$ ולכן זה גם לא תלוי במעויין והמרובע חסום ולכן ניצחנו.



פתרון שני: נקבע את המעגל $ACGE$ ונסובב את E, G על המעגל ו-F, H יזוזו בהתאם על המעגלים עם מרכז ב-J וקטרים JB, JD בהתאמה. נשים לב שהתנאי ש-$BDHF$ מעגל נשמר בסיבוב כי זה תנאי על אורכים של JB, JD, JF, JH והם לא משתנים לכן נבחר את E, G להתלקד עם C, A ובמקרה זה התנאי $JB \cdot JD = JF \cdot JH$ מתקיים באופן ברור.

3. נתון משולש ABC עקבי הגבהים לצלעות BC, AC, AB יסומנו D, E, F בהתאמה. המעגל החוסם של AEF יסומן ω. המעגלים שעוברים ב-D ומשיקים ל-ω ב-E, F יסומנו ω_1, ω_2 בהתאמה. הוכיחו כי שתי נקודות החיתוך של ω_1 עם ω_2 נמצאות על BC.

פתרון: מבקשים להוכיח ש- BC זה הציר הרדיקלי של ω_1 ו-ω_2.



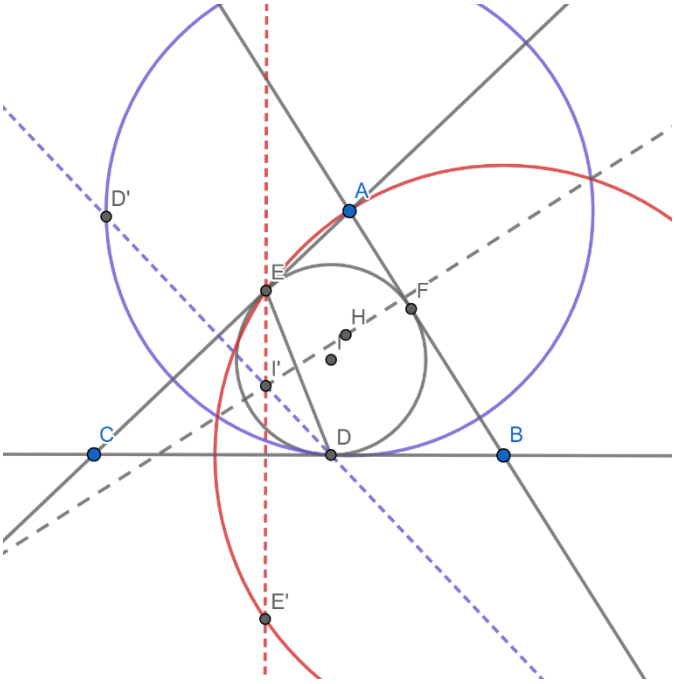
ניזכר שהישרים ME, MF הם המשיקים למעגל AEF בנקודות הללו מכיוון שהקטע המחבר את M עם אמצע AH הוא קוטר במעגל תשע נקודות ולכן $ME = MF$ אבל זו גם הדרגה של M ביחס לω_1 ו-ω_2 ולכן ניצחנו.

4. המעגל החסום במשולש ABC משיק לצלעות BC, AC, AB בנקודות D, E, F בהתאמה. הוכיחו כי מרכז הגבהים במשולש DEF הוא המרכז הרדיקלי של המעגלים עם מרכזים ב-A, B, C ועוברים ב-D, E, F בהתאמה.

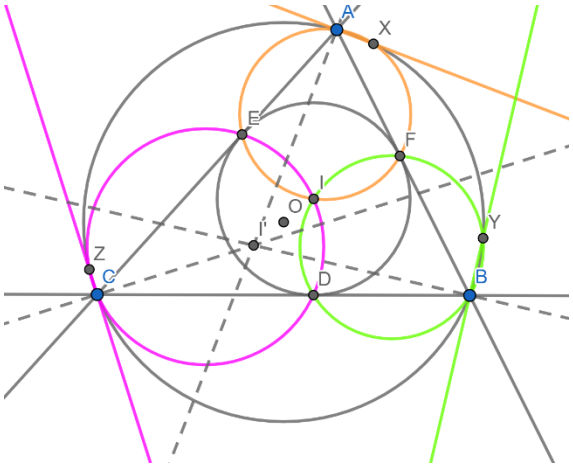
פתרון: מבקשים שנראה שמפגש הגבהים של משולש נקודות ההשקה, H, נמצא על הציר הרדיקלי של המעגל שעובר ב-D עם מרכז ב A (הסגול), והמעגל שעובר ב-E עם מרכז ב-B (האדום), כש-D, E הן נקודות ההשקה המתאימות.

ראשית נוכיח שהציר הרדיקלי עובר דרך I', השיקוף של I ביחס ל-ED.

בבירור המעגל הסגול עובר ב-D', השיקוף של D ביחס ל-AC ו-$DI'D'$ כי DI' מקביל ל-EI שמאונך ל-AC. לכן מספיק להראות ש-$DI' \cdot D'I' = EI' \cdot E'I'$ אבל הציור נשמר בשיקוף סביב החוצה זווית של C ולכן זה בבירור מתקיים.



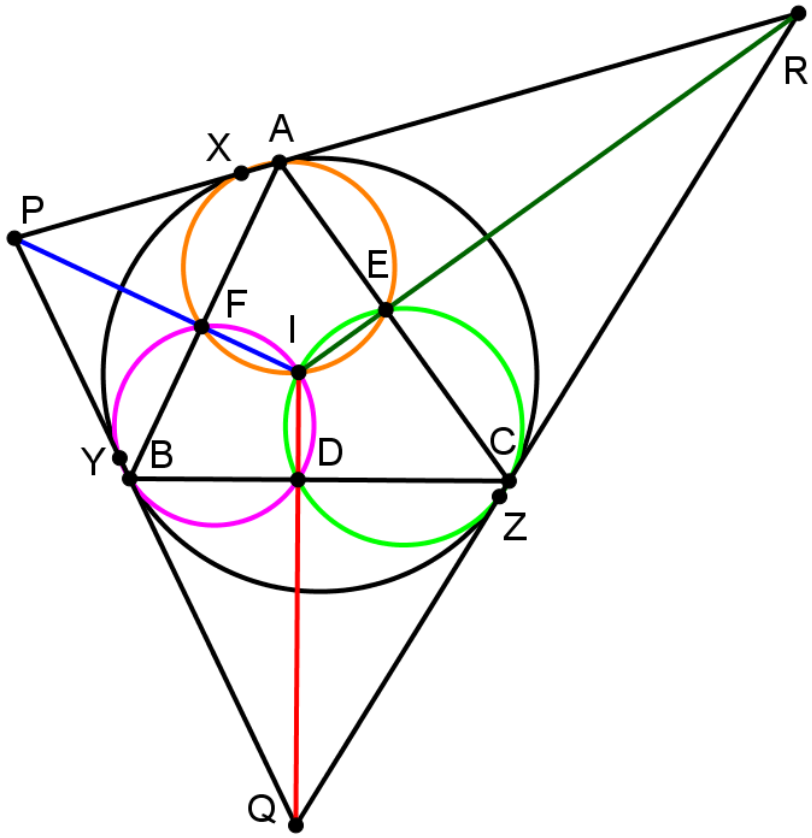
כעת נותר להראות שהישר $I'H$ מאונך ל-AB כי אז הוא יהיה מאונך לקטע המרכזים ועל כן הציר הרדיקלי, אבל זה ברור כי $I'H$ מקביל ל-IF בגלל שיש הזזה שמעבירה את המעגל EHD למעגל EFD, את H ל-F ואת I' ל-I, ולכן ניצחנו.



5. נתון משולש ABC החסום במעגל ω. המעגל החסום במשולש משיק לצלעות BC, AC, AB בנקודות D, E, F בהתאמה. המעגלים החוסמים של AEF, BDF, CDE חותכים את ω שנית בנקודת X, Y, Z בהתאמה. הוכיחו כי האנכים מ-A, B, C ל-AX, BY, CZ נחתכים בנקודה.

פתרון ראשון: נפתור את השאלה בעזרת ניחוש מושכל לאיפה הישרים הללו יחתכו. נסתכל על AX, האנך מ-X עובר ב-I, האנך מאמצע AX עובר ב-O, ולכן האנך מ-A עובר בשיקוף של I ביחס ל-O ולכן ניצחנו.

פתרון שני: נשים לב ש-AX הוא הציר הרדיקלי של הכתום והשחור ו-BY הוא הציר הרדיקלי של המעגל הירוק והשחור ולכן נקודת החיתוך של AX עם BY שנסמנה P נמצאת על הציר הרדיקלי של המעגל הכתום והירוק כלומר על IF. בנוסף ברור ש-$PF \perp AB$. בדיוק באותו אופן נקודות החיתוך של CZ עם AX ו-BY, שנסמן אותן Q, R בהתאמה, נמצאות על DI, EI ומקיימות ש-$QD \perp BC, RE \perp AC$.



נחשב:

$$\begin{aligned} PA^2 + RZ^2 + QB^2 &= PF^2 + AF^2 + RE^2 + CE^2 + QD^2 + BD^2 \\ &= (PF^2 + BF^2) + (RE^2 + AE^2) + (QD^2 + CD^2 \\ &= PB^2 + RA^2 + QC^2 \end{aligned}$$

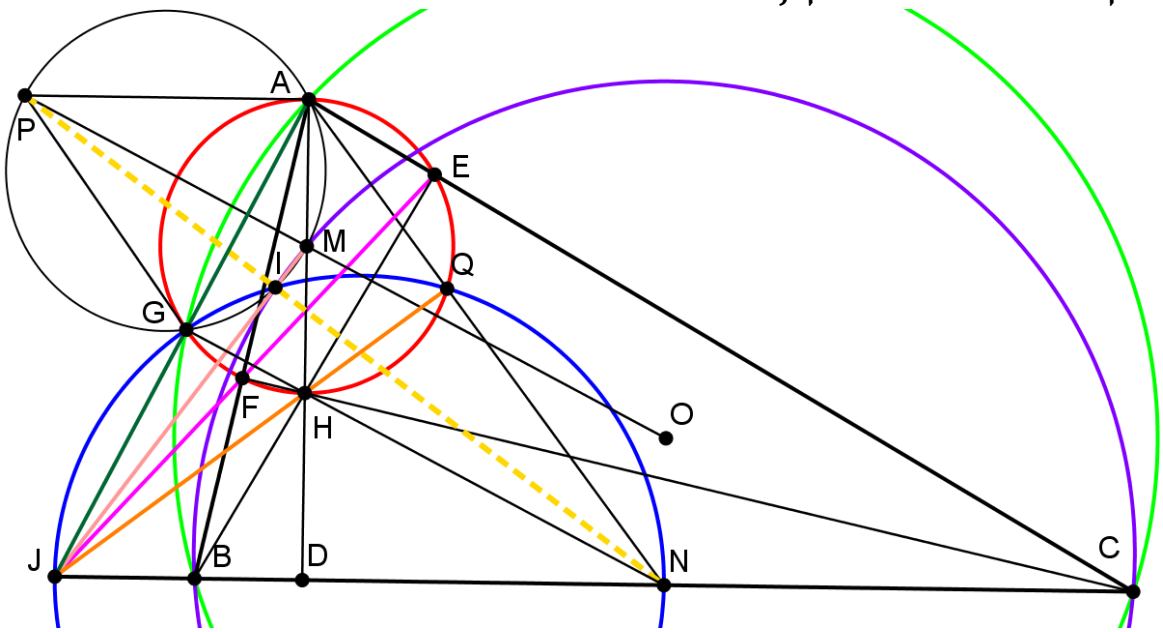
ומשפט קרנו אומר שניצחנו.

6. נתון משולש ABC. H הוא מפגש הגבהים במשולש ו-O הוא מרכז המעגל החוסם. M, N הם אמצעי AH, BC בהתאמה. המעגל ω עם קוטר AH חותך את המעגל החוסם של ABC בנקודה G ואת AN בנקודה Q. המשיק ל-ω בנקודה G חותך את OM ב-P. הוכיחו כי המעגלים GNQ ו-MBC נחתכים בנקודה T על PN.

פתרון ראשון: נסמן את עקבי הגבהים לצלעות ב-D, E, F.
נסתכל על הצירים הרדיקליים של שלושת המעגלים הבאים: מעגל עם קוטר AB, מעגל עם קוטר AH והמעגל החוסם של ABC. נקבל שהישרים: AG, BC, EF נפגשים בנקודה, נסמן אותה J.

סך הכל קיבלנו שהזוויות $\angle JQN, \angle JGN$ ישרות ולכן המעגל NQG הוא בעצם המעגל עם קוטר NJ.

עכשיו נסתכל על הצירים הרדיקליים של המעגלים עם קוטר AH, DQ ומעגל 9-הנקודות של ABC: נקבל שהישרים EF, DN, HQ נחתכים בנקודה אחת שזו כמובן J.



נסמן את נקודת החיתוך של מעגלים MBC, NQG ב-I ואת נקודת החיתוך השנייה של JI עם המעגל MBC ב-M'.

מדרגת הנקודה של J נקבל:

$$JI \cdot JM' = JB \cdot JC = JG \cdot JA = JD \cdot JN$$

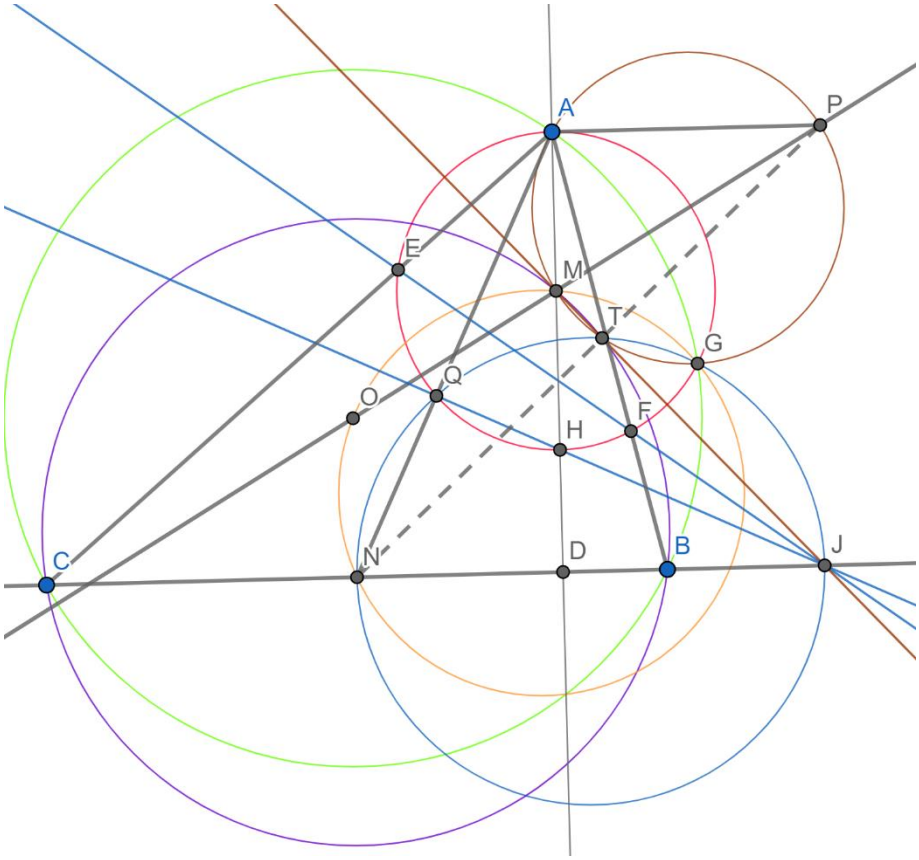
כאשר השוויון האחרון נובע ממעגל שקוטרו AN.

קיבלנו ש-$NDIM'$ מעגל אבל $\angle M'IN = \angle JIN = 90^o$ ולכן גם הזוויות $\angle NDM'$ ישרה כלומר M' נמצע על הגובה מ-A אבל הנקודה על מעגל MBC שנמצאת על הגובה מ-A זה M (ברור שזה לא הנקודה השנייה).

הערה: את הטיעון האחרון יותר קל להבין אם עושים אינוורסיה ב-J ששומרת על כל המעגלים שאפשר.

סך הכל קיבלנו ש-M, I, J נמצאות על ישר וש-$JI \cdot JM = JG \cdot JA$ כלומר ש-$AGIM$ מעגל אבל המעגל AGM זה מעגל שקוטרו PM ולכן הזווית $\angle PIM$ ישרה, אבל כבר אמרנו ש-$\angle NIM$ ישרה ולכן ניצחון!

פתרון שני: (די דומה אבל אילני קצת חופר ומסביר יותר דברים על הציור)
הוספתי הרבה דברים לציור אז נוכיח לאט ובצורה מסודרת את כל מה שנוסף:

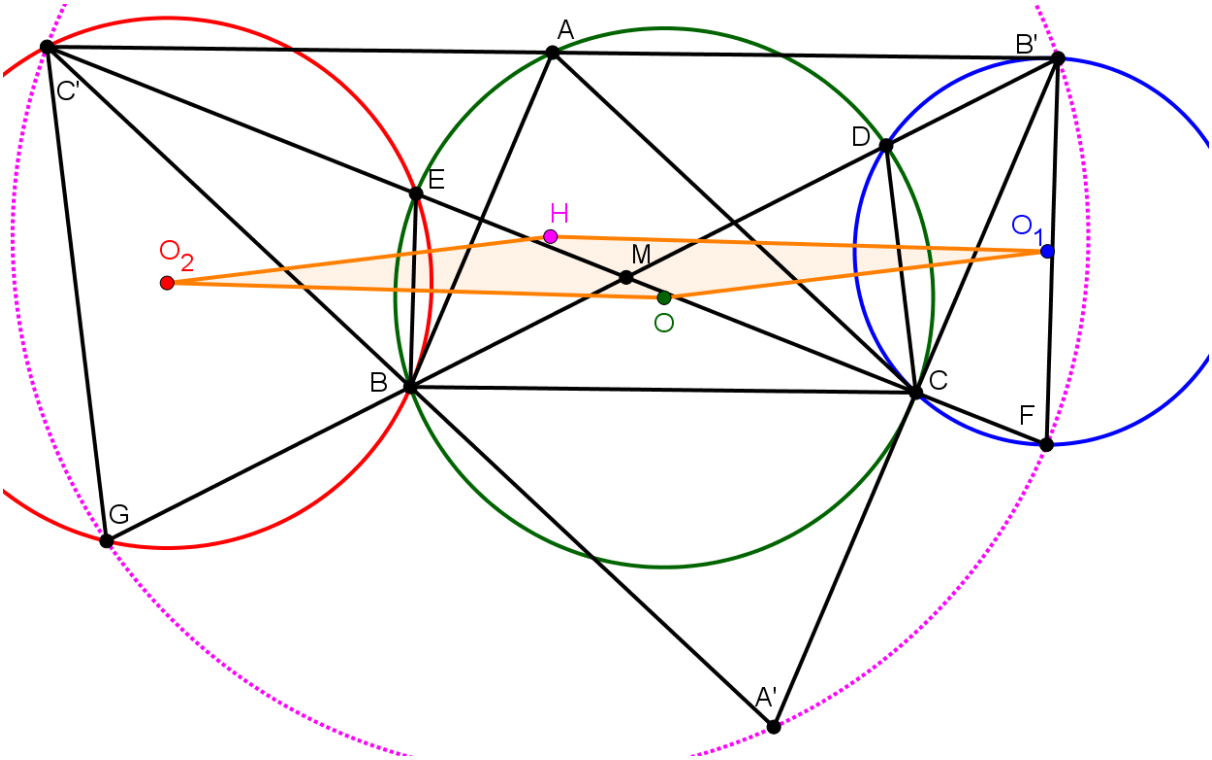


ראשית נראה שהישרים הכחולים EF, QH והמעגל הכחול QNG נחתכים בנקודה על הצלע BC. נראה שהישרים נחתכים על הצלע וזה יספיק כי זוויות NGJ ישרה וחיתוך הישרים יוכיח שגם NQJ ישרה. נעשה הטלה דרך J מ-AH ל-AN:
D עובר ל-N חיתוך EF עם הגובה עובר לחיתוך EF עם AN, הנקודה A נשמרת, ואנחנו רוצים להראות ש-H עובר ל-Q. אבל שתי הרביעיות הן הרמוניות, האחת על התיכון הרמונית כי NE ו־NF משיקים למעגל, והאחת על הגובה ברורה אם מעבירים ישרים דרך E, הישרים EA ו-EH הם חוצי הזווית של EF ו-ED.
המעגל הכתום ברור כי OMGN טרפז. כעת נוכיח ש-JMT ישר כש-T מוגדרת כנקודת החיתוך של המעגל הכחול והסגול. נעשה אינברסיה מ-J ששומרת על המעגל הסגול.B, C מתחלפות ולכן גם המעגל הירוק נשמר ולכן A, G מתחלפות ולכן גם המעגל האדום נשמר ולכן Q, H מתחלפות והמעגל הכחול עובר לישר AH. הנקודה M נמצאת על AH ועל המעגל הסגול, לכן אחרי האינברסיה היא תהיה על המעגל הכחול והסגול.

קיבלנו ככה את המעגל החום AMTG ונרצה להראות שגם P עליו כי אז MP יהיה קוטר ובבירור NTP יהיה ישר. ניזכר ש-P הוא בעצם מפגש המשיקים מ-A ומ-G כי OM מאונך ל-AG ולכן AMGP חסום וניצחנו.

7. נתון משולש ABC החסום במעגל ω. התיכונים מ-B, C חותכים את ω ב-D, E בהתאמה. מרכז המעגל העובר ב-D ומשיק ל-AC ב-C יסומן O_1, מרכז המעגל העובר ב-E ומשיק ל-AB ב-B יסומן O_2. הוכיחו כי מרכז מעגל 9-הנקודות של ABC נמצא על הישר O_1O_2.

פתרון ראשון: בשביל לקבל ציור יותר סימטרי נמשיך את BD עד שיחתוך שוב את המעגל הכחול ב-B' ואת המעגל האדום ב-G, באותו אופן נמשיך את CE עד שיחתוך שוב את המעגל האדום ב-C' ואת המעגל הכחול ב-F. נסמן את אמצע הצלע AB ב-M_C ונחשב את הדרגה שלו ביחס למעגל האדום:



$$M_CE \cdot M_CC' = M_CB^2 = -M_CB \cdot M_CA = M_CC \cdot M_CE$$

כלומר קיבלנו ש-M_C זה אמצע CC' ולכן $C'ACB$ מקבילית ובאותו אופן גם $B'CBA$ מקבילית. בשביל ציור יותר סימטרי נסמן גם את A' כך ש-$A'BAC$ מקבילית.

נסמן ב-M את מפגש התיכונים ב-ABC ונרשום דרגות:

$$ME \cdot MC' = MG \cdot MB = MG \cdot \frac{MC \cdot ME}{MD} = MG \cdot ME \cdot \frac{MB'}{MF}$$

ולפיכך $MC' \cdot MF = MG \cdot MB'$ כלומר $B'FGC'$ מעגל.

כעט נשים לב שביחס לשני התיכונים מתקיים ש-$C'G$ אנטי-מקביל ל-BE שהוא בתורו אנטי-מקביל ל-CD ולכן CD מקביל ל-$C'G$ ובאותו אופן $B'F$ מקביל ל-BE. עכשיו נשים לב שמתקיים:

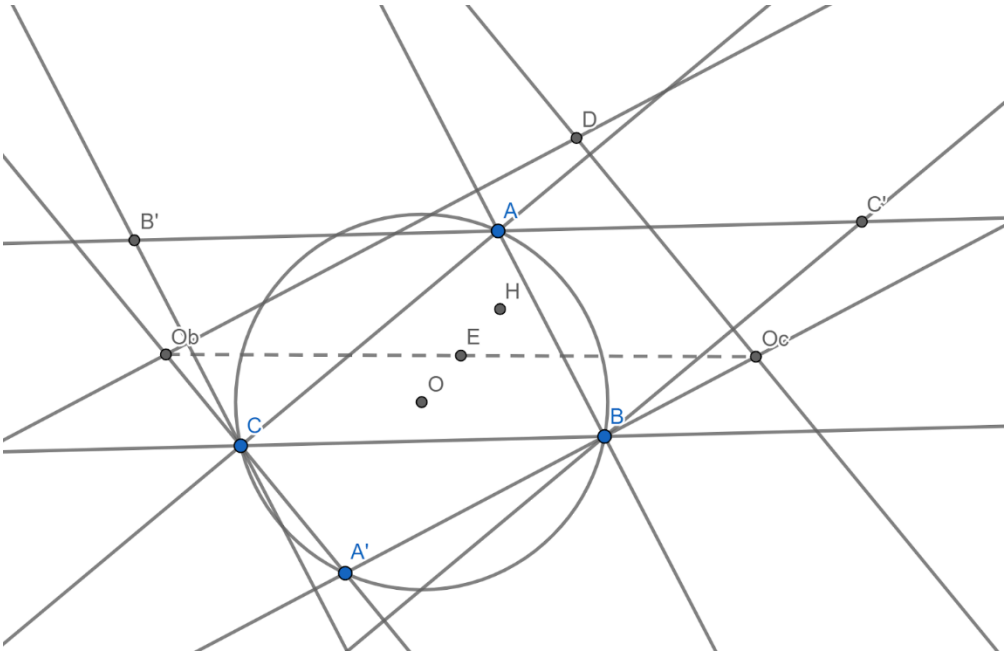
$$\angle C'GB' = \angle BDC = \angle BAC = \angle B'A'C'$$

ולכן המעגל $B'FGC'$ עובר גם ב-A' ולכן מרכז המעגל הזה הוא מפגש הגבהים של ABC.

נשאר רק לשים לב ש-OO_1 ו-O_2H הם האנכים האמצעים של CD ו-GC' אבל כבר אמרנו ש-CD ו-GC' מקבילים ולכן כך גם OO_1 ו-O_2H. בדיוק באותו אופן נראה שגם OO_2 ו-O_1H מקבילים ולכן OO_1HO_2 מקבילית ולכן O_1O_2 עובר באמצע OH שזה מרכז מעגל 9-הנקודות של ABC.

פתרון שני: כמו בפתרון הראשון נראה שהמעגלים עוברים ב-B', C'.
ננסח את השאלה מחדש:

נסמן ב-A'' את הנקודה הנגדית ל-A על המעגל ABC. נעביר את הישרים $A''B, A''C$ ונחתוך אותם עם האנכים האמצעיים של $B'C, C'B$ כדי לקבל את O_1, O_2. נשים לב שאם נחתוך את האנכים האמצעיים בנקודה D נקבל ש-$A''O_1DO_2$ מקבילית, ולכן אם נראה ש-E **(כאן E מסמן את מרכז מעגל 9-הנקודות של ABC ולא את ה-E בשאלה המקורית!)** היא אמצע $A'D$ אז היא גם אמצע O_1O_2. לשם כך נשקף את הסרטוט דרך E



ונרצה להראות ש-A'' עובר ל-D. אנחנו יודעים ש-O עובר ל-H לכן מספיק להראות ש-HD הוא הווקטור הנכון.
נשים לב ש-CH, BH מקבילים ל-O_1D, DO_2 לכן אפשר פשוט לגרור את B, C על הישרים שמקבילים לצלע הנגדית עד שהם יפגשו על ההשלמה למקבילית. במצב זה H הופכת לקודקוד ו-D למרכז המעגל החוסם של המשולש ולכן ניצחנו.

8. הנקודות P, Q צמודות איזוגונלית במשולש ABC. ω הוא המעגל הפדלי של P ביחס ל-ABC. H, G הם מפגשי הגבהים במשולשים PBC, QBC בהתאמה. הוכיחו כי אמצע HG דואלית לקטע האמצעים במשולש המקביל ל-BC ביחס ל-ω.

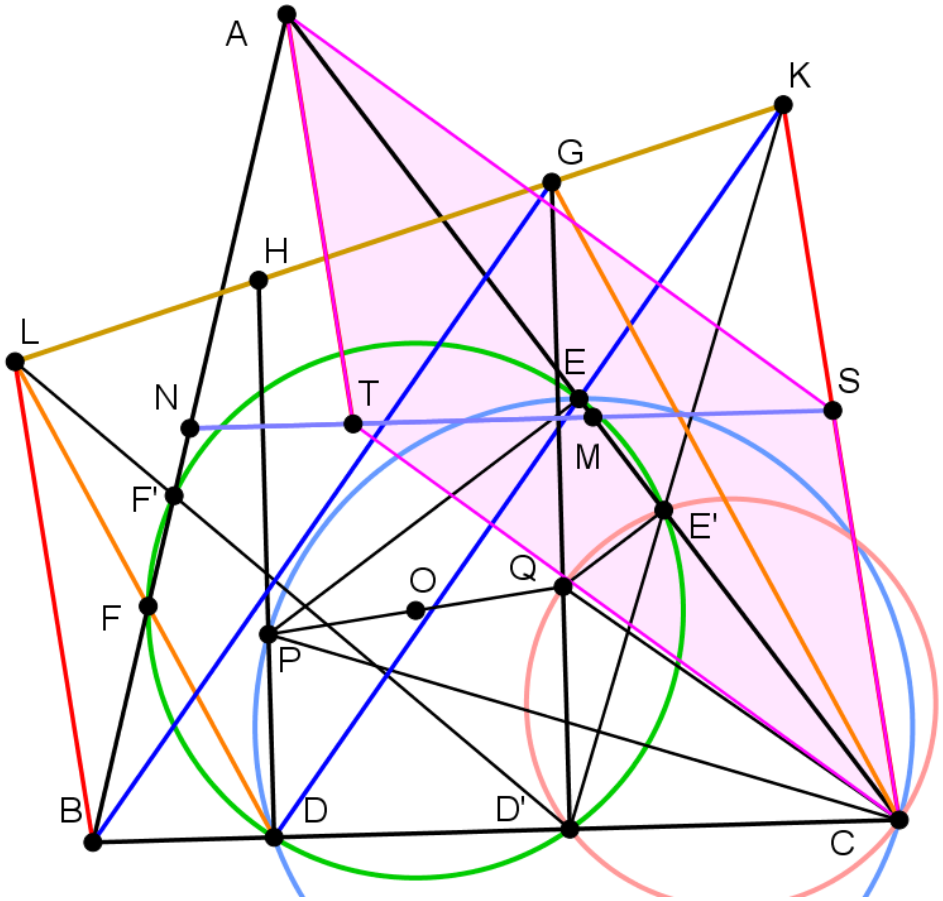
פתרון: נסמן את עקבי הגבהים מ-P, Q לצלעות ב-D, E, F ו-D', E', F'.
את נקודות החיתוך של DE עם $D'E'$ ושל DF עם $D'F'$ נסמן ב-K ו-L בהתאמה.

עובדה ידועה היא שהנקודות $DD'E'EF'F$ נמצאות על מעגל שמרכזו O-אמצע PQ. נשים לב שהציר הרדיקלי של המעגל DEC ו-ω הוא DE והציר הרדיקלי של $D'E'C$ ו-ω הוא $D'C'$ ולכן K נמצא על הציר הרדיקלי של שני המעגלים אבל גם C בברור נמצא על הציר הרדיקלי ולכן KC מאונך לישר המרכז שהוא בתורו מקביל ל-PQ ולכן $KC \perp PQ$ ובאותו אופן $BL \perp PQ$.

בנוסף נשים לב ש-CP עובר במרכז המעגל החוסם של CDE ו-CQ זה השיקוף ביחס לחוצה זווית ולכן $DE \perp CQ$ ובאותו אופן גם $BQ \perp FD$.
סך הכל קיבלנו ש-$LG||BG, DL||BL, BK||CK$ ולכן לפי משפט פאפוס על הנקודות B, D, C ושלושת הנקודות האינסופיות בכיוונים שציינו נקבל ש-K, G, L נמצאים על ישר. כמובן שגם H נמצא על ישר זה.
כעת נבחין שהישר המבחר את אמצע HG עם O מאונך ל-BC ולכן גם לקטע האמצעים המתאים ולכן מספיק להגיד שהנקודה הדואלית ל-HG נמצאת על קטע האמצעים.

נסתכל על הישר הדואלי ל-K ביחס ל-ω, נסמן אותו l. כמובן ש-l עובר ב-C. ומתקיים ש- $(CD, CE; l, CK) = -1$ נחתוך את הרביעיה הזו עם

קטע האמצעים ונקבל ש- $(\infty, M; T, S) = -1$ כאשר M זה אמצע AC,
ו-T, S הם החיתוכים של l, CK עם קטע האמצעים.



כלומר קיבלנו ש-M הוא אמצע TS ולכן ASCT מקבילית כלומר הישר הדואלי של K חותך את קטע האמצעים בנקודה T כך ש-AT||CK. מאותו שיקול נקבל שהישר הדואלי של L חותך את קטע האמצעים בנקודה T' כך ש-AT'||BL אבל BL||CK ולכן $T = T'$ וניצחון!