דרגה וציר!

1. נתון טרפז $ABCD$, $AB||CD$. המעגל עם קוטר AD חותך את המעגל עם קוטר BC בנקודות X, Y. P זה חיתוך האלכסונים בטרפז. הוכיחו כי P, X, Y נמצאות על ישר אחד.

2. נתונים שני מעוינים $ABCD$ ו- $EFGH$ כך ש-$AB = EF$. נתון שהמרובע $ACEG$ חסום במעגל. הוכיחו כי גם המרובע $BDFH$ חסום במעגל.

3. נתון משולש ABC עקבי הגבהים לצלעות BC, AC, AB יסומנו D, E, F בהתאמה. המעגל החוסם של AEF יסומן ω. המעגלים שעוברים ב-D ומשיקים ל-ω ב-E, F יסומנו ω_1, ω_2 בהתאמה. הוכיחו כי שתי נקודות החיתוך של ω_1 עם ω_2 נמצאות על BC.

4. המעגל החסום במשולש ABC משיק לצלעות BC, AC, AB בנקודות D, E, F בהתאמה. הוכיחו כי מרכז הגבהים במשולש DEF הוא המרכז הרדיקלי של המעגלים עם מרכזים ב-A, B, C ועוברים ב-D, E, F בהתאמה.

5. נתון משולש ABC החסום במעגל ω. המעגל החסום במשולש משיק לצלעות BC, AC, AB בנקודות D, E, F בהתאמה. המעגלים החוסמים של AEF, BDF, CDE חותכים את ω שנית בנקודת X, Y, Z בהתאמה. הוכיחו כי האנכים מ-A, B, C ל-AX, BY, CZ נחתכים בנקודה.

6. נתון משולש ABC. H הוא מפגש הגבהים במשולש ו-O הוא מרכז המעגל החוסם. M, N הם אמצעי AH, BC בהתאמה. המעגל ω עם קוטר AH חותך את המעגל החוסם של ABC בנקודה G ואת AN בנקודה Q. המשיק ל-ω בנקודה G חותך את OM ב-P. הוכיחו כי המעגלים GNQ ו-MBC נחתכים בנקודה T על PN.

7. נתון משולש ABC החסום במעגל ω. התיכונים מ-B, C חותכים את ω ב-D, E בהתאמה. מרכז המעגל העובר ב-D ומשיק ל-AC ב-C יסומן O_1, מרכז המעגל העובר ב-E ומשיק ל-AB ב-B יסומן O_2. הוכיחו כי מרכז מעגל 9-הנקודות של ABC נמצא על הישר O_1O_2.

8. הנקודות P, Q צמודות איזוגונלית במשולש ABC. ω הוא המעגל הפדלי של P ביחס ל-ABC. H, G הם מפגשי הגבהים במשולשים PBC, QBC בהתאמה. הוכיחו כי אמצע HG דואלית לתיכון של A ב-ABC ביחס ל-ω.

בתאבון!