מרימים אקספוננט!

בכל הגרסאות $p \nmid y \ \& \ p \nmid x$

$p \neq 2$	$p \mid x-y$	$v_p\left(x^n-y^n\right)=v_p\left(x-y\right)+v_p\left(n\right)$
	$\& \ p \mid x+y$ $2 \nmid n$	$v_p\left(x^n+y^n\right)=v_p\left(x+y\right)+v_p\left(n\right)$
$p=2$	$4 \mid x-y$	$v_2\left(x^n-y^n\right)=v_2\left(x-y\right)+v_2\left(n\right)$
	$\& \ 2 \mid x-y$ $2 \mid n$	$v_2\left(x^n-y^n\right)=v_2\left(x-y\right)+v_2\left(x+y\right)+v_2\left(n\right)-1$

תקציר פתרונות:

1. חשבו כמה פעמים $2^{3^n}+1$ מתחלק ב-3.

פתרון: מהרמת אקספוננט פשוט ברור ש-

$$v_3\left(2^{3^n}+1\right)=n+1$$

אבל אפשר גם לא להשתמש בהרמה ולהוכיח באינדוקציה:

$$2^{3^{n+1}}+1=(2^{3^n}+1)\left(\left(2^{3^n}\right)^2-2^{3^n}+1\right)$$

ואז מספיק לראות ש- $\left(2^{3^n}\right)^2-2^{3^n}+1 \equiv 3 \ mod \ 9$

2. נתונים שלמים חיוביים x,y,p,n,k כאשר n אי-זוגי ו-p ראשוני אי-זוגי. הוכיחו שאם $x^n+y^n=p^k$ אז n זה חזקה של p.

פתרון: נסמן: $n=p^a \cdot b$ ואז מצד אחד $x^{p^a}+y^{p^b} | x^n+y^n$ ומצד שני מהרמת אקספוננט $v_p(x^n+y^n)=v_p(x^{p^a}+y^{p^b})$ (צריך להניח ש-x,y לא מתחלקים ב-p, כי אם כן אז אפשר לצמצם).

3. מצאו את כל השלמים $a,b>1$ עבורם מתקיים:

$$b^a|a^b-1$$

פתרון: נבחר ראשוני p שמחלק את b, ברור שהוא לא יכול לחלק את a.

נשים לב ש-$a^{ord_p(a)}-1|a^b-1$ ולכן $ord_p(a)|b,\ p-1$ ואז אם נבחר את p להיות הראשוני המינימלי שמחלק את b אז נקבל ש-$ord_p(a)=1$. ועכשיו מהרמת אקספוננט (בהנחה ש-$p\neq 2$):

$$v_p(a^b-1)=v_p(a-1)+v_p(b)$$

ואז מהחלוקה מקבלים:

$$v_p(b)\cdot a\leq v_p(a-1)+v_p(b)$$

כלומר:

$$a-1\leq v_p(a-1)$$

שזה סתירה.

עכשיו אם $p=2$ אז

$$a\cdot v_2(b)\leq v_2(a-1)+v_2(a+1)+v_2(b)-1$$

$$a-1\leq (a-1)\cdot v_2(b)\leq v_2(a^2-1)-1$$

זה יכול לקרות רק אם $a=3$ ו-$v_2(b)=1$ ולכן הפתרון היחיד זה

$$b=2,a=3$$

4. פתרו בשלמים:

$$a^{2009}+b^{2009}=7^c$$

5. מצאו את כל ה-a-ים הטבעיים עבורם לכל n המספר $4(a^n+1)$ זו חזקה שלישית של מספר שלם.

פתרון: נניח קיים $b\in\mathbb{N}$ עבורו $4(a^n+1)=8b_n^3$. נחלק ב־4 ונקבל $a^n+1^n=2b_n^3$. נניח כי קיים $p\neq 2$ ראשוני המחלק את $a+1$. אז p מחלק אותו מספר פעמים המתחלק ב־3, כי $a+1$ הוא קובייה. נרים אקספוננט. נקבל $v_p(2b_n^3)=v_p(a^n+1)=v_p(a+1)+v_p(n)$. נסתכל $\mod 3$. נקבל $v_p(2b_n^3)\equiv 0, v_p(a+1)\equiv 0 \mod 3$. לכן, $v_p(n)$ הינו 0. אבל זה לא נכון לכל n.

לכן, לא קיים ראשוני שאינו 2 המחלק את $a+1$. נסמן $a=2^{3k+1}-1$. נשים לב שאם a הוא פתרון אז גם $a^2=2^{3t+1}-1$ הוא פתרון. אם $t\neq 0$, $a^2\equiv -1 \mod 4$, אבל זה לא קורה אף פעם. לכן $t=0$ ומקבלים את הפתרון $a=1$. ■

6. הוכיחו שלכל n שלם n^7+7 לא ריבוע של מספר שלם.

$$n^7+7=a^2$$

פתרון: נסתכל מוד 4 ואז ברור ש- $n\equiv 1 mod\ 4$. נשכתב את השמוואה:

$$n^7+(2)^7=a^2+11^2$$

נשים לב ש-

$$n+2|n^7+2^7=a^2+11^2$$

אבל $n+2\equiv 3\ mod\ 4$ וסכום ריבועים בדרך כלל לא מתחלק

בראשוניים שהם 3 מוד 4: אם $p\equiv 3\ mod\ 4$ ו-

$$p|x^2+y^2 => p|x,y$$

כי אחרת $(\frac{x}{y})^2\equiv -1\ modp$ אבל -1 זה לא שארית ריבועית.

קיבלנו ש- $11|n+2$ ואפילו יותר מזה: $v_{11}(n+2)$ אי-זוגי כי אחרת ל-

$n+2$ יהיה חייב להיות עוד מחלק ראשוני שהוא 3 מוד 4 אבל אמרנו

שאסור, חוץ מזה ברור ש- $v_{11}(n+2)\leq 2$ ולכן הוא שווה 1.

עכשיו מהרמה:

$$v_{11}(a^2+11^2)=v_{11}(n^7+2^7)=v_{11}(n+2)+v_{11}(7)=1$$

7. מצאו את כל הראשוניים p וזוגות של מספרים שלמים (x,y) כך

שהמספרים $x^{p-1}+y$ ו- $y^{p-1}+x$ הם חזקות של p.

פתרון: דברים ברורים: אם $p=2$ אז כל x,y שהסכום שלהם חזק 2

עובד ולכן מעכשיו p זה ראשוני אמיתי. p לא מחלק לא את x ולא את y

ולכן x,y זרים. בנוסף יכול להיות ש-$x=y$ אז נניח ש- $x>y$ ובפרט

$$y^{p-1}+x<x^{p-1}+y$$

כלומר $y^{p-1}+x|x^{p-1}+y$ ולכן

$$y^{p-1}+x|(-y^{p-1})^{p-1}+y=y(y^{p(p-2)}+1)$$

אפשר להתעלם מה-y באגף ימין כי $y^{p-1}+x$ זר ל-y.

$$y^{p-1}+x \mid y^{p(p-2)}+1$$

$$v_p\left(y^{p(p-2)}+1\right)=v_p(y+1)+1$$

לכן בגלל ש-$y^{p-1}+x$ חזקת p בעצם נקבל:

$$y^{p-1}+x \mid p\cdot(y+1)$$

כלומר:

$$y^{p-1}+y \le p(y+1)$$

זה לא באמת קורה, נשים לב ש-$y \equiv -1 \ mod \ p$ ולכן $y \ge p-1$ וקל לראות שהאי-שוויון מתקיים רק עבור $y=2, p=3$ ומקרה הזה מקבלים $x=5$.

8. נתונים a, b מספרים רציונליים שונים וחיוביים. ידוע שעבור אינסוף n-ים טבעיים מתקיים ש- a^n-b^n שלם. הוכיחו כי גם a, b שלמים.

רעיון כללי: נרשום את a, b בצורה הבאה:

$$a=\frac{x}{z} \quad b=\frac{y}{z} \quad \gcd(x,y,z)=1$$

$$z^n \mid x^n-y^n$$

$$n \le v_p(x-y)+v_p(n) \le const+\log(n)$$

וזה לא קורה לאינסוף n-ים.