קומבי נשמר!!

1. במדינה רחוקה שצורתה לוח ריבועי $N \times N$ (כל משבצת זה עיר) $N-1$ מהערים נדבקו בקורונה. כל יום, הקורונה מתפשטת לכל הערים שיש להן לפחות שתי ערים שכנות לפי צלע שכבר נדבקו בקורונה. הוכיחו כי לפחות עיר אחת אף פעם לא תדבק.

פתרון: היקף הערים שנדבקו זה חצי אינווריאנט שלא גדל, בהתחלה הוא יכל להגיע עד ל-$4N-4$ ולכן לא יכול להיות שבסוף כולם חולים כי אז ההיקף הוא $4N$.

2. בסדרת המספרים ... 1,0,1,0,1,0,3,5, כל איבר החל מהאביר השביעי מוגדר להיות שווה לספרת האחדות של סכום ששת האיברים הקודמים בסדרה. הוכיחו כי בסדרה זו אף פעם לא יופיע הרצף: 0,1,0,1,0,1

פתרון: מדברים על ספרה אחרונה אז הגיוני להסתכל מוד 10,5 או 2. אנחנו נעבוד מוד 5. רוצים להוכיח שאי אפשר לעבור מהמצב 1,0,1,0,1,0 למצב 0,1,0,1,0,1 אז נרצה להסתכל על סכומים של שישיות של איברים עוקבים, כמובן שסתם סכום לא יעבוד כי לשני המצבים יש אותו סכום אז נרצה סכום עם מקדמים.

נסמן ב-a_i את אברי הסדרה וב-b_i את המקדמים של הסכום:

$$\begin{aligned} b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 + b_4a_4 + b_5a_5 + b_6a_6 \\ \equiv b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 + b_4a_4 + b_5a_5 \\ + b_6(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) \\ = b_6a_0 + (b_1 + b_6)a_1 + (b_2+b_6)a_2 + (b_3 + b_6)a_3 \\ + (b_4 + b_6)a_4 + (b_5 + b_6)a_5 \end{aligned}$$

לכן נבקש ש- $b_1 \equiv b_6 \ mod \ 5$ וש- $b_i + b_6 \equiv b_{i+1} \ mod \ 5$ עבור $i = 1,2,3,4,5$ לכן אנו בעצם מבקשים ש-$b_5 \equiv 0$ ו-$b_4 \equiv -b_6, b_3 \equiv -2b_6, b_2 \equiv -3b_6, b_1 \equiv -4b_6$ וגם $b_1 \equiv b_6$ נבחר איזשהו b_6 ששונה מ-0 מוד 5 ואת שאר המקדמים בהתאם ונקבל שהביטוי שנוצר זה אינווריאנט ומספיק לבדוק שהוא שונה בשני המצבים מיניהם אנו רוצים לעבור.

ניסוח קצר: נסתכל על הביטוי:

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6 \; mod \; 5$$

הוא נשמר לאורך הסדרה בהתחלה הוא שווה ל-2 ובמצב 0,1,0,1,0,1 ל-4 ולכן אי אפשר להגיע אליו.

3. . זילבי ויותם משחקים משחק. כל אחד רושם מספר שלם חיובי על פיסת נייר ומעביר אותה לפנדה בלי שהשני יראה. פנדה רושם על הלוח שני מספרים שלמים, האחד מהם שווה לסכום של המספרים של יותם וזילבי והשני מספר אקראי לבחירתו.

לאחר מכאן פנדה שואל את זילבי: "האם אתה יודע בוודאות מה המספר שיותם רשם על הדף?"

אם זילבי עונה "לא" אז פנדה שואל את יותם: "האם אתה יודע בוודאות מה המספר שזילבי רשם על הדף?", אם יותם עונה "לא" אז פנדה שוב שואל את זילבי וכך האלה.

יותם וזילבי ילדים חכמים וטובים ועל כן לא משקרים.

הוכיחי כי כעבור כמות סופית של שאלות אחד מהילדים יענה "כן".

פתרון: נסמן את המספרים שפנדה רשם ב-M, N כשאר $M > N$.

הרעיון הוא להתרכז במידע "הפומבי". בהתחלה אנחנו יודעים ששני המספרים גדולים מ-0 וקטנים מ-M, לאחר שיותם וזילבי יגידו "לא" נדע ששני המספרים קטנים מ-N כי אחרת אחד מהם היה אומר כן. לאחר ששניהם שוב יגידו "לא" נדע ששני המספרים גדולים מ-$M - N$. לאחר ששניהם שוב יגידו לא נדע ששני המספרים קטנים
מ-$N - (M - N) = 2N - M$. לאחר ששניהם שוב יגידו לא נדע ששני המספרים גדולים מ-$M - (2N - M) = 2M - 2N$.

ועכשיו כבר קל לראות באינדוקציה שלאחר שכל ילד אמר "לא" $2K$ פעמים נדע ששני המספרים גדולים $K(M - N)$ ומתישהו זה יעבור את N שזה לא הגיוני אז מתישהו הם יפסיקו להגיד "לא".

4. על לוח משבצות אינסופי במשבצות של לוח $N \times N$ הוצבו N^2 חיילים. יובל משחק מחשבת על הלוח: בכל מהלך ניתן לבחור את אחד החיילים, לקפוץ איתו מעל חייל סמוך לפי צלע ולהוריד את החייל מעליו קפצו.

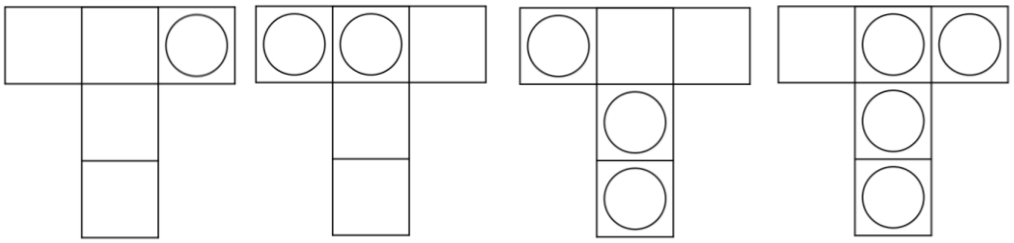
עבור אילו ערכי N יובל יצליח להשאיר חייל בודד על הלוח?

תקציר פתרון: נטען שאם N מתחלק ב-3 אז יובל לא יצליח.

נצבע את האלכסונים ב-3 צבעים, בהתחלה יש כמות זהה מכל צבע. בכל מהלך מורידים אחד משני צבעים ומוסיפים אחד לצבע השלישי, כלומר מבחינת זוגיות כל הצבעים משנים זוגיות לכן אם בהתחלה הייתה זוגיות שווה לכולם אז גם בסוף צריכה להיות זוגיות שווה אבל אם יש חייל בודד אז יש שני צבעים זוגיים וצבע אחד אי זוגי, סטירה.

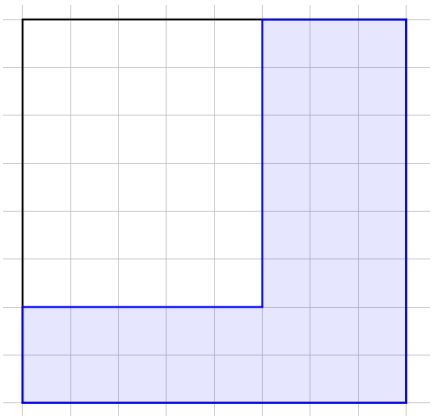
אם N לא מתחלק ב-3 אז אפשר.

הרעיון המרכזי הוא שאפשר לעשות כזו סדרה של פעולות:



כלומר למחוק שלישיה כזו.

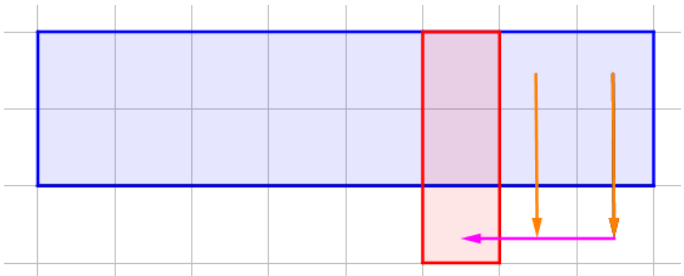
עכשיו יש הרבה דרכים לסיים, נראה אלגוריתם עבור $N \equiv 2 \, mod 3$ והמקרה של 1 מוד 3 יעבוד בצורה דומה.



נמחק שלישיות מהריבוע עד שנקבל צורה כזו:

עכשיו נמחק את השליות האופקיות מימין עד שנקבל מלבן $2 \times N$.

עכשיו נעשה את הדבר הבא:



נעשה את הפעולות הכתומות ואז את הפעולה הוורודה ואז נמחק את המלבן האדום, כלומר עברנו ממלבן $2 \times N$ למלבן $2 \times (N-3)$, נמשיך כך עד שנגיע ל-2×2 ואותו בברור אפשר למחוק.

5. יאיר מציב 2^N אסימונים במעגל, חלקם שחורים וחלקם לבנים.

לאחר מכאן נגה מציבה אסימון לבן בין כל שני אסימונים בצבע זהה ואסימון שחור בין כל שני אסימונים בצבעים שונים ולבסוף מורידה את האסימונים של יאיר.

אחר כך יאיר מבצע את אותה הפעולה על האסימונים של נגה וכך האלה.

הוכיחו כי בסופו של דבר כל האסימונים במעגל יהיו לבנים.

פתרון ראשון: אלגברה לינארית! נשום את מצב האסימונים בתור ווקטור של אפסים ואחדים, כאשר שחר זה 1 ולבן זה 0. כל פעולה היא בעצם להכפיל את הווקטור הקיים במטריצה של אחדים על האלכסון הראשי ועל האלכסון אחד מעל, זה המטריצה עבור $N = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אנחנו רוצים להראות שזו מטריצה נילפוטנטית, כלומר שלאחר שנעלה אותה בחזקה גדולה נקבת את מטריצת האפס.

כאמור המטריצה שלנו-A היא סכום של מטריצת הזהות-I ומטריצה של אחד על האלכסון המשני-J, כלומר $A = I + J$. הפעלה של J על ווקטור כלשהו מסובבת את הווקטור הזה אבל נסובב ווקטור כלשהו הרבה פעמים הוא יחזור לעצמו, במילים אחרות $J^{2N} = I$ ולכן

$$A^{2N} \equiv I^{2N} + J^{2N} = I + I = 2I \equiv 0 \; mod \; 2$$

כלומר המטריצה שלנו נילפוטנית וניצחנו!

תקציר פתרון שני: נניח ויאיר החליט להציב אסימון שחור אחד בלבד. נשיל לב שהמצב כעבור K פעולות יראה כמו השורה ה-K במשולש פסקל מודולו 2. בנוסף נשים לב שבשורה ה-2^N במשולש פסקל כל המספרים זוגיים ולכן כל האסימונים לבנים.

כעט נניח ויאיר החליט לשים שני אסימונים שחורים אז הפעם המצב יראה כסכום (קסור) של המצבים שבהם הוא שם אסימון בודד במקומות המתאימים ולכן שוב כעבור 2^N פעולות הכל יהיה לבן.

הטיעון בפסקה האחרונה עובד לכל כמות של אסימונים ולא רק שניים, המצב יהיה סכום מוד 2 של המצבים שהם מונח אסימון בודד במקומות המתאימים.

6. לשחר $\frac{n(n+1)}{2}$ אבנים, הוא בוחר מספר טבעי k ומחלק את האבנים ל-k ערימות כרצונו. לאחר מכן כל דקה שחר לוקח אבן אחת מכל ערימה ומרכיב מהן ערימה חדשה. הוכיחו כי רצונו של שחר לא משנה כלומר שלאחר כמות זמן סופית המצב של הערמות יתייצב למצב קבוע שלא תלוי בחלוקת האבנים ההתחלתית.

פתרון: נסדר את האבנים בדיאגרמת יאנג, כל פעולה היא בעצם לקחת את השורה התחתונה ולהציב אותה בתור העמודה השמאלית (ואולי גם לדחוף דברים שמאלה), נשעה שינוי קואורדינטות ונראה זאת כך: בכל מהלך מזיזים את כל הדיאגרמה אחד ימינה ואחד למטה ואז את מה שירד מתחת לקו האופק מחזירים לעמודה הראשונה (ואולי דוחפים דברים שמאלה). בתהליך הזה כל אבן מסתובבת באלכסון משלה אבל אולי לפעמים דוחפים אותה שמאלה ואז היא עוברת להסתובב באלכסון קטן יותר אבל באיזשהו שלב הדחיפות לאלכסון ה-i צריכות להיפסק מכיוון שכבר יש i אבנים באלכסון זה ולכן באיזשהו שלב כל הדחיפות יפסקו כלומר כל האלכסונים יתמלאו וזה בדיוק המצב שבו הערמות הן $1,2,\dots,n$ וזה מצב יציב.

ניסוח אחר של אותו דבר זה לכל אבן להסתכל על הסכום של מספר השורה ומספר העמודה שלה וזה חצי אינווריאנט.

בתיאבון!