קומבי!!

(לא ~~קומבי~~)

1. במדינה רחוקה שצורתה לוח ריבועי $N \times N$ (כל משבצת זה עיר) $N-1$ מהערים נדבקו בקורונה. כל יום, הקורונה מתפשטת לכל הערים שיש להן לפחות שתי ערים שכנות לפי צלע שכבר נדבקו בקורונה. הוכיחו כי לפחות עיר אחת אף פעם לא תדבק.

2. בסדרת המספרים $1,0,1,0,1,0,3,5, \ldots$ כל איבר החל מהאביר השביעי מוגדר להיות שווה לספרת האחדות של סכום ששת האיברים הקודמים בסדרה. הוכיחו כי בסדרה אף פעם לא יופיע הרצף: $0,1,0,1,0,1$

3. . זילבי ויותם משחקים משחק. כל אחד רושם מספר שלם חיובי על פיסת נייר ומעביר אותה לפנדה בלי שהשני יראה. פנדה רושם על הלוח שני מספרים שלמים, האחד מהם שווה לסכום של המספרים של יותם וזילבי והשני מספר אקראי לבחירתו.

לאחר מכאן פנדה שואל את זילבי: "האם אתה יודע בוודאות מה המספר שיותם רשם על הדף?"

אם זילבי עונה "לא" אז פנדה שואל את יותם: "האם אתה יודע בוודאות מה המספר שזילבי רשם על הדף?", אם יותם עונה "לא" אז פנדה שוב שואל את זילבי וכך האלה.

יותם וזילבי ילדים חכמים וטובים ועל כן לא מקשרים.

הוכיחי כי כעבור כמות סופית של שאלות אחד מהילדים יענה "כן".

4. על לוח משבצות אינסופי במשבצות של לוח $N \times N$ הוצבו N^2 חיילים. יובל משחק מחשבת על הלוח: בכל מהלך ניתן לבחור את אחד החיילים, לקפוץ איתו מעל חייל סמוך לפי צלע ולהוריד את החייל מעליו קפצו.

עבור אילו ערכי N יובל יצליח לשאיר חייל בודד על הלוח?

5. יאיר מציב 2^N אסימונים במעגל, חלקם שחורים וחלקם לבנים.

לאחר מכאן נגה מציבה אסימון לבן בין כל שני אסימונים בצבע זהה ואסימון שחור בין כל שני אסימונים בצבעים שונים ולבסוף מורידה את האסימונים של יאיר.

אחר כך יאיר מבצע את אותה הפעולה על האסימונים של נגה וכך האלה.

הוכיחו כי בסופו של דבר כל האסימונים במעגל יהיו לבנים.

6. לשחר $\frac{n(n+1)}{2}$ אבנים, הוא בוחר מספר טבעי k ומחלק אות האבנים ל-k ערימות כרצונו. לאחר מכן כל דקה שחר לוקח אבן אחת מכל ערימה ומרכיב מהן ערימה חדשה. הוכיחו כי רצונו של שחר לא משנה כלומר שלאחר כמות זמן סופית המצב של הערימות יתייצב למצב קבוע שלא תלוי בחלוקת האבנים ההתחלתית.

בתיאבון!