# גיאוקומבי!

1. ריבוע חולק למלבנים. האם בהכרח ניצן למצוא שני מלבנים כך שקו המחבר את מרכזיהם נמצא כולו באיחוד של שני מלבנים אלו?

**פתרון ראשון:** נתבונן במלבן שמכיל את הפינה השמאלית העליונה של הריבוע. נניח שהצלע האופקית שלו לא קצרה מהצלע האנכית. נתבונן במלבן שמכיל את אמצע הצלע התחתונה של המלבן שבחרנו, הצלע האופקית הימנית של מלבן זה חייב להיות מימין לצלע הימין של המלבן שעומד בפינה אחרת קוו המרכזים שלהם יהיה בפנים. אבל עכשיו מאותו שיקול הצלע התחתונה של המלבן שמכיל את אמצע הצלע הימנית של המלבן הפינתי חייבת להיות מלמטה לצלע התחתונה של המלבן אבל שני הדברים לא יכולים לקרות בו זמנית.

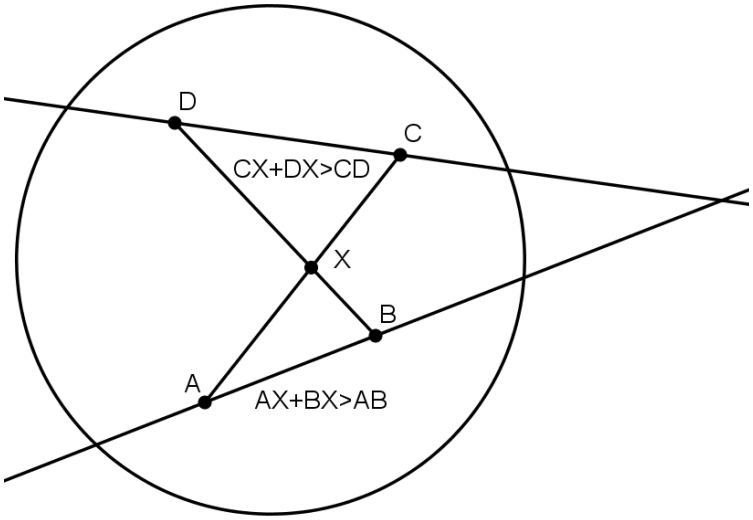
יתכן והמלבן הפינתי מגיע עד לצלע התחתונה של הריבוע אבל אז פשוט מלבן שמכיל את אמצע הצלע הימנית יעבוד.

**פתרון שני:** נבחר את המלבן עם הצלע האופקית הערוכה ביותר. נתבונן במלבן המכיל את אמצע הצלע האופקית של מלבן זה, בגלל שלמלבן שבחרנו צלע אופקית מקסימלית קטע המרכזים של שני המלבנים לא יכול לצאת משניהם.

כמו בפתרון הקודם יש לציין שיתכן והמלבן נוגע גם בצלע העליונה וגם בצלע התחתונה.

2. בתוך מעגל סומנו 100 נקודות כך שאף שלוש לא על ישר אחד.
הוכיחו כי ניתן לחלק את הנקודות לזוגות ולהעביר ישר דרך כל זוג כך שנקודות החיתוך של כל הישרים יהיו בתוך המעגל.

**פתרון:** נניח ושני ישרים $AB, CD$ נחתכים מחוץ למעגל. נשים לב כי אם נחליף אותם בישרים $AC, BD$ כך שהישרים יחתכו בתוך המעגל אז עורכי הקטעים בין נקודות המסומנות גדלים: $AB + CD \leq AC + BD$ זאת מאי-שוויון המשולש.




נמשיך בתהליך זה, בכל פעולה סכום עורכי הקטעים בין נקודות מסומנות גדל, כיוון שיש לו כמות סופית של אפשרויות הוא לא יוכל לגדול לנצח ובמצב זה לא יהיו יותר נקודות חיתוך מחוץ למעגל.

3. במישור סומנו $2N$ נקודות ו-$3N$ ישרים. הוכיחו כי ניתן למצוא נקודה במישור כך שסכום המרחקים ממנה לנקודות המסומנות יהיה גדול מסכום המרחקים ממנה לישרים המסומנים.

**פתרון:** נעשה "zoom out" עד שכל הנקודות יראו באותה נקודה-$P$ וכל הישרים יעברו דרך $P$. נבחר נקודה $X$ במרחק $R$ מ-$P$. סכום המרחקים מ-$X$ ל-$2N$ הנקודות הוא בערך $2NR$.

נחשב את המרחק הממוצע מ-$X$ לישר דרך $P$.

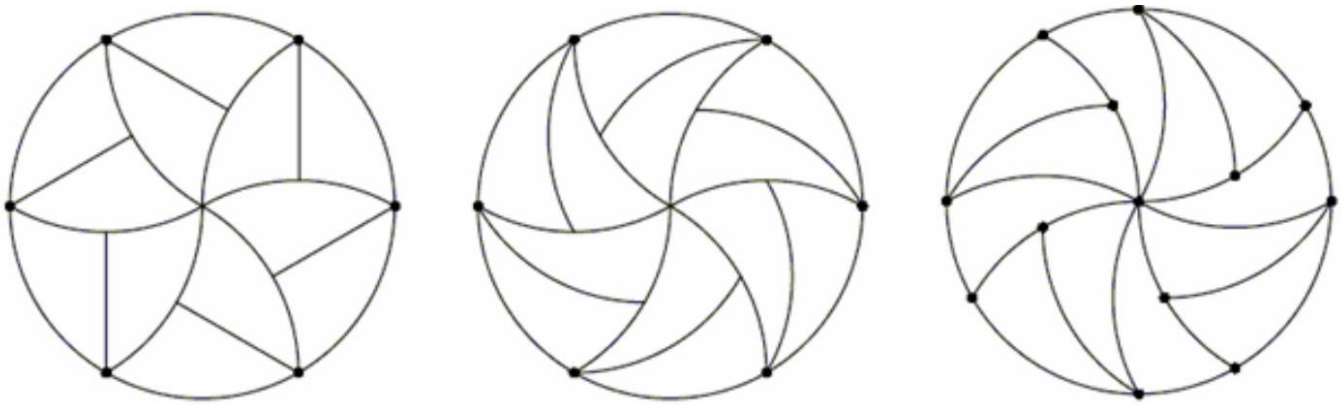
המרחק מ-$X$ לישר ספציפי $l$ שווה ל-$|Rsin\alpha_l|$ כאשר $\alpha_l$ היא הזווית בין $l$ ל-$XP$ ולכן הממוצע שווה ל-

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\alpha=0}^{2\pi} R|sin\alpha| = \frac{4R}{2\pi} = \frac{2R}{\pi}$$

לכן ניתן לבחור נקודה $X$ עבורה סכום המרחקים לישרים יהיה בערך $\frac{6NR}{\pi} < 2NR$.

4. חילקו את עיגול היחידה לחלקים חופפים כך שהשפה של לפחות אחד מהחלקים לא תכיל את מרכז העיגול.

**פתרון:** חלוקות אפשריות:



5. במישור נתונים $N$ ישרים במצב כללי (אף שניים לא מקבילים ואף 3 לא נחתכים בנקודה). הישרים חילקו את המישור לאזורים. הוכיחו כי ניתן לתת עלות לכל אזור כך שכל ישר יחלק את המישור לשני חלקים שעלותם זהה.

**פתרון:** נרשום את המספר 1 בכל אזור. נקרא לישר שוויוני אם הוא מחלק את המישור לשני חלקים עם עלות זהה. נבחר ישר לא שוויוני $l$ (אם אין אז כבר ניצחנו) נשים לב שאם נלך על הישר הזה מאוד רחוק (לאינסוף) נראה שהוא מחלק שני אזורים אינסופיים בגודלם נקרא להם $A, B$. גם אם נלך על ישר זה לאינסוף בכיוון השני נראה שהוא מחלק שני אזורים אינסופיים, נקרא להם $X, Y$. נשים לב שעבור כל ישר אחר $A, B$ נמצאים בצד הנגדי ל-$X, Y$, זאת מפני שנקודת החיתוך של ישר זה עם $l$ נמצאת בחלק הסופי של $l$ ולכן באמצע בין $A, B$ ל-$X, Y$.

נניח ש-$A, X$ נמצאים בצד היותר עני של $l$, נוסיף ל-$A$ חצי ממה שחר לצד העני וכך נעשה גם ל-$X$ עכשיו $l$ הפך להיות שוויוני וכל ישר אחר לא הרגיש בשינו מכיוון שלשני צדדיו התווסף גודל זהה.

6. יערה גזרה משולש מנייר לאחר מכאן כל דקה היא גזרה את אחד המשולשים שהיו לה לשני משולשים קטנים יותר. לאחר זמן מה, אך לא פחות משעה, התברר ליערה כי כל המשולשים שיצרה חופפים. מצאו את כל המשולשים ההתחלתיים עבורם זה מצב זה אפשרי.

7. נתון מצולע משוכלל עם 2012 צלעות. מהו ה-$N$ המקסימלי עבורו ניתן לבחור $N$ קודקודים של המצולע שיצרו מצולע קמור בלי צלעות מקבילות?

**פתרון:** חסם: נחלק את הקודקודים לרביעיות: $A_i, A_{i+1}, A_{i+1006}, A_{i+1007}$

אם כל ארבעת הקודקודים יהיו במצולע אז $A_iA_{i+1}, A_{i+1006}A_{i+1007}$ יהיו זוג צלעות מקבילות ולכן אפשר מכל רביעה אפשר לקחת לכל היותר 3 ולכן אסור יותר מ-1509.

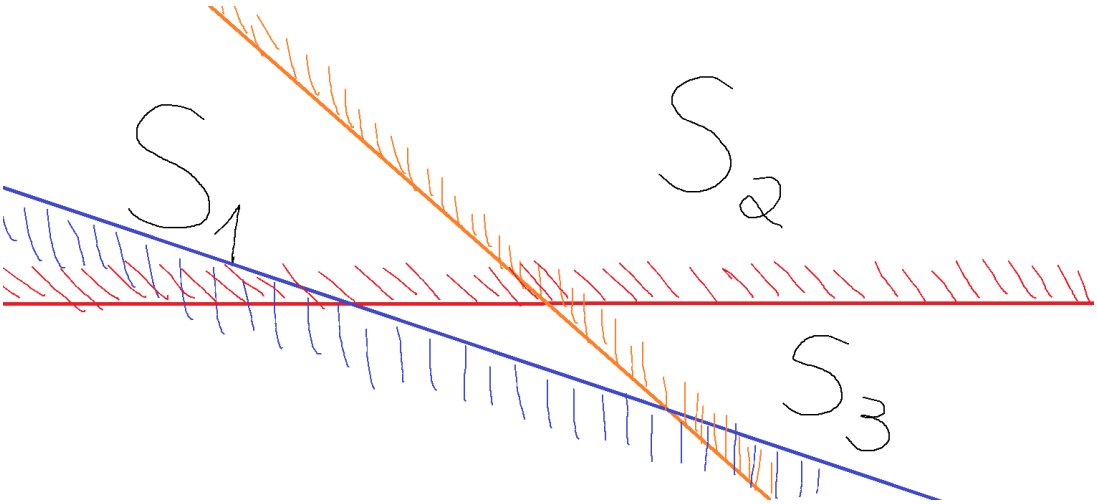
דוגמה: נבחר את כל הקודקודים מ-1 ועד 1006 ואת הקודקודים הזוגיים מ-1007 ועד 2012, זה יוצא בדיוק 1509.

8. במישור סומנו 60 נקודות כך שאף 3 לא על ישר אחד. הוכיחו כי ניתן לצייר 20 משולשים עם קודקודים בנקודות מסומנות (כל נקודה קודקוד של משולש אחד בדיוק) כך שלכל המשולשים יש נקודה פנימית משותפת.

**פתרון:** נשים לב שמספיק למצוא נקודה במישור המקיימת שלכל ישר דרכה הנקודות מתחלקות בצורה יחסית שוויונית, כלומר שבכל צד יש לפחות 20 נקודות מסומנות, אכן אם נמצא נקודה כזו נוכל למספר את הנקודות עם כיוון השעון (אפשר להניח שנקודה זו לא נמצאת על אף ישר שמחבר שתי נקודות מסומנות, כי אפשר להזיז טיפה את הנקודה) ואז נצייר 20 משולשים שמספרי הקודקודים שלהם יהיו $i, i+20, i+40$ לכל $1 \leq i \leq 20$.

כעט נבחר כיוון במישור ונקרא לו למעלה. נעביר ישר אופקי דרך הנקודה ה-20 בגובהה. ברור שהנקודה שאנחנו מחפשים חייבת להיות מעל לישר שהרגע העברנו. נעביר ישר כזה בכל כיוון ונקבל שהנקודה שאנחנו מחפשים חייבת להיות בחיתוך של חצאי מישורים שהם כמובן צורות קמורות ולכן בשביל להוכיח שיש נקודה שנמצאת בכולם מספיק להוכיח שכל שלושה מהם נחתכים (זה נקרא משפט היילי).

אנחנו רוצים להראות שהמצב הבא לא אפשרי:




החלק "הצבוע" של כל ישר מסמן את הכיוון שבו נמצאות 40 נקודות מסומנות, כאן אנחנו מניחים שהישר שעובר בנקודה ה-20 בגובה לא עובר בו זמנית גם בנקודה ה-21, זה כמובן לא נכון לכל הכיוונים אך נכון כמעת לכולם והכיוונים הבעייתיים לא יפריע לנו בגלל רציפות וקומפקטיות.

נשים לב שבשטח $S_1$ יש לכל היותר 20 נקודות (בגלל הכתום) ולכן בגלל שב-$S_1$ ו-$S_2$ ביחד יש 40 נקודות (בגלל האדום) אנחנו מקבלים שב-$S_2$ יש לפחות 20 נקודות ולכן הישר הכחול כפי שהוא מצויר בציור לא אפשרי והוא חייב לחתוך את $S_2$ ולכן לשלושת חצי המישורים המתאימים תהיה נקודה משותפת וניצחנו.

9. במישור נתונות $N$ נקודות ו-$N$ מגדלאורים שמאירים זווית בגודל $\frac{2\pi}{N}$. הוכיחו שניתן להציב מגדלור בכל נקודה כך שכל המישור יהיה מואר.

א. עבור $N=3$. ב. $N=4$ ג. $N$ כללי.

ד. הפעם כל מגדלור מאיר זווית $\alpha_i$ כך ש-$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N=2\pi$

והמגדלורים הוצבו בהתחלה בראשית הצירים. המתרה הפעם זה להזיז את המגדלורים לנקודות המסומנות (בלי לסוס) כך שכל המישור יהיה מואר.

# בתאבון!