שאלות רוסיות אקסטרה!

1. הפונקציות $x+1, x^2+1, x^3+1, ...$ כתובות על הלוח. מותר לרשום על הלוח עוד פונקציה שהיא הפרש או מכפלה של שתי פונקציות שכבר כתובות על הלוח. תמצאו את הפונקציה שניתן לרשום על הלוח שהיא לא 0 זהותית, אי־שלילית בחיוביים ואי־חיובית בשליליים

2. האם אפשר לצבוע את כל השלמים החיוביים ב־2 צבעים, כך שסכום של שני מספרים שונים באותו צבע הוא אף פעם לא חזקת 2?

3. ידוע ש־$\sin x + \cos y$ וגם $\sin y + \cos x$ הם מספרים רציונאליים חיוביים. הוכיחו שקיימים מספרים שלמים חיוביים m, n כך ש־$n\cos x + m\sin x$ חיובי שלם

4. שלושה כדורים מונחים על השולחן ומשיקים זה לזה. נקודות השקה של כדורים זה עם זה הן A, B, C, נקודות ההשקה של הכדורים עם השולחן הן D, E, F. הוכיחו שרדיוס המעגל החוסם של A, B, C קטן מרדיוס המעגל החוסם של D, E, F

5. לאיילה יש שני פולנומים f, g מדרגה≥ 2. ברווז אומר מספר t ואיילה עונה $f(t)$ או $g(t)$, אבל ברווז לא יודע מי מהם. תוך כמה מהלכים ברווז יכול לדעת את אחד מהפולינומים?