תחרות פולנית

1. ABC הוא משולש חד זוויות. נקודות X, Y חיות על הקטעים AB, AC בהתאמה, כך ש- $AX = AY$ והקטע XY עובר דרך מפגש האנכים במשולש. הישרים המשיקים למעגל החוסם של AXY ב- X וב- Y נפגשים בנקודה P. הוכיחו שהנקודות A, B, C, P על מעגל אחד.

2. נתון p ראשוני, ושלם r כך ש- $p|r^7 - 1$. הוכח שאם קיימים שלמים a, b כך ש- $p|r + 1 - a^2$ וגם $p|r^2 + 1 - b^2$, אז קיים c כך ש- $p|r^3 + 1 - c^2$.

3. $n \geq 3$ אורחים נפגשו במסיבה. חלק מהם הכירו אחד את השני, אך אין אף רביעייה של אורחים a, b, c, d כך שהזוגות $\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}$ הכירו אחד את השני, אבל הזוגות $\{a, c\}, \{b, d\}$ לא הכירו. נקרא לקבוצה X לא ריקה של אורחים קבוצה פנימית אם כל זוג אורחים ב- X מכירים, ואין אף אורח שאינו ב- X ומכיר את כל האורחים ב- X. הוכיחו שיש לכל היותר $\frac{n(n-1)}{2}$ קבוצות פנימיות שונות.

4. נתונים n, k, l שלמים חיוביים, ו- $\sigma : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$ פונקצייה חד חד ערכית, כך ש- $\sigma(x) - x \in \{k, -l\}$ עבור כל $x \in \{1, 2, ..., n\}$. הוכיחו ש- $k + l | n$.

5. הסדרה $a_1, a_2, ..., a_n$ של מספרים חיוביים מקיימת את התנאים הבאים:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leq 1$$

$$a_i \leq a_{i-1} + 1$$

כאשר a_0 הוא שלם. הוכיחו ש:

$$n \leq 4a_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$$

6. נסמן ב- Ω את המעגל החוסם של המשולש חד זוויות ABC. נקודה D היא אמצא הקשת BC של Ω שלא מכילה את A. מעגל ω עם מרכז ב- D משיק לקטע BC בנקודה E. משיקים למעגל ω שעוברים בנקודה A חותכים את הישר BC בנקודות K ו- L כך שהנקודות B, K, L, C נמצאות על הישר BC בסדר הזה. מעגל γ_1 משיק לקטעים AL ו- BL, ולמעגל Ω בנקודה M. מעגל γ_2 משיק לקטעים AK ו- CK ולמעגל Ω בנקודה N. ישרים KN ו- LM נחתכים בנקודה P. הוכיחו שזווית KAP שווה לזווית EAL.