<u>אירוע הגיאומטריה הגדול של 2020</u>

1. במרחב תלת ממדי לוקחים ארבעון, ומישור שלא עובר באף קודקוד שלו.
משטח M הוא הצמדה איזוגונלית של המישור ביחס לארבעון. כמה ישרים יש על M?

2. יהי ABCD מרובע חסום. יהי E מפגש של AC ו-BD. האנך מ-E לצלע AB חותך את AB ב-G ואת CD ב-J. האנך מ-E ל-CD חותך את CD ב-H ואת AB ב-I. הוכח כי אמצעי הצלעות BC, HG, JI נמצאים על ישר.

3. יהי משולש ABC. נסמן ב-I_A, I_B, I_C את מרכזי המעגלים החסומים מבחוץ. נסמן ב-X, Y, Z קטבים צפוניים (מרכזי הקשתות הארוכות BC, AC, AB בהתאמה, במעגל החוסם של ABC). הישרים XI_A, YI_B, ZI_C חותכים את BC, AC, AB בנקודות D, E, F בהתאמה.
א. הוכיחו כי AD, BE, CF נפגשים בנקודה אחת. נסמן אותה ב-P.
ב. נסמן ב-M_A, M_B, M_C את אמצעי צלעות המשולש BC, AC, AB בהתאמה. אז גם I_AM_A, I_BM_B, I_CM_C נחתכים ב-P.

4. נתון משולש ABC, ומרכז המעגל החוסם O. מרכזי המעגלים החסומים במשולשים BOC, COA, AOB יקראו D, E, F בהתאמה. נסמן ב-N_A, N_B, N_C את הקטבים הצפוניים במעגל החוסם של ABC. הוכיחו כי המרובעים AN_AEF, BN_BDF, CN_CDE חסומים במעגלים.

5. לכל $x, y, z > 0$, הוכיחו כי:

$$x+y+z \le \frac{\sqrt{4x^2+2xy+2xz+y^2-zy+z^2}+\sqrt{4y^2+2yx+2yz+x^2-xz+z^2}+\sqrt{4z^2+2zx+2zy+y^2+xy+x^2}}{3}$$

6. כמה מטבעות עם רדיוס R צריך כדי לכסות לגמרי מטבע עם רדיוס 2R?

7. נתון משולש ABC. יהא ω המעגל החוסם שלו, ויהא I מרכז המעגל החסום במשולש. יהיו N_A, N_B, N_C הקטבים הצפוניים ב-ω ביחס לצלעות BC, AC, AB בהתאמה. יהיו I_A, I_B, I_C מרכזי המעגלים מבחוץ מול הקודקודים A, B, C בהתאמה. הישרים CN_B ו-BN_C נפגשים בנקודה P. הישרים AN_C ו-CN_A נפגשים בנקודה Q. הישרים AN_B ו-BN_A נפגשים בנקודה R.
א. הישרים BC ו-N_BN_C נפגשים בנקודה A_1. באופן דומה נגדיר B_1, C_1.
הוכיחו כי הנקודות P, B_1, C_1, I_A נמצאות על ישר אחד.
ב. הוכיחו כי הנקודות P, Q, R, I נמצאות על ישר אחד. (כאשר I מרכז המעגל החסום בתוך ABC)

8. במשולש ABC מפגש הגבהים הוא H, ו-H_A, H_B, H_C הם עקבי הגבהים על הצלעות BC, AC, AB בהתאמה. העבירו מעגלים דרך BCH ו-AHH_BH_C וחתכנו בנקודה X_A. באופן דומה הגדירו את X_B.
הישרים AX_A, BX_B נחתכים בנקודה שנסמן ב-M. התברר ש-C, X_A, X_B על ישר אחד.
הוכיחו כי $MX_A = MX_B$.

9. נתונים שני ישרים לא מקבילים a, b, ומעגל ω שמשיק לשניהם. הראו כי קיים מעגל Ω שונה מ-ω, כך שלכל בחירה של ישר שלישי c, מתקיים: אם ω המעגל החסום בתוך המשולש שנוצר ע"י שלשת הישרים, אז Ω משיק למעגל תשע הנקודות של המשולש הנ"ל.
(חומר למחשבה: מה קורה כשהזווית בין a, b היא $60°$?)

10. **(השאלה הייתה פתוחה כשהיא נשלחה לכולם. אבל עבר זמן מאז. אולי היא כבר לא פתוחה?!)**
יהיו שני ישרים מקבילים. יש מעגל ω שחותך את אחד הישרים בנקודות A, C, ואת הישר השני בנקודות B, D, כך שהנקודות A, B שתיהן בצד שמאל, והנקודות C, D שתיהן בצד ימין. נתון מעגל שמשיק לשני הישרים הנתונים, ושמשיק מבפנים ל-ω (אבל בצד של A, B). נסמן ב-F את נקודת ההשקה עם ω.
נסמן ב-I את מרכז המעגל שמשיק ל-AC, BD, ומשיק לקטע AB מהצד הנגדי ל-F.
נסמן ב-E את אמצע הקשת AB, מהצד הנגדי ל-F.
הוכיחו כי E, F, I על ישר אחד.

11. נתון משולש ABC. העבירו מעגל b כלשהו דרך A, C, ומעגל c כלשהו דרך A, B.
תהי D נקודה על המעגל החוסם של ABC.
הישר DC חותך את b ב-E_C.
הישר AE_C חותך את המעגל החוסם של ABC ב-F_C.
הישר BF_C חותך את c ב-G_C.
נגדיר באופן סימטרי את G_B. (מחליפים את B עם C ולהפך)
הוכיחו כי A, G_B, G_C על ישר אחד.

12. יש ארבעון משוכלל $ABCD$, שמרכזו M.
נתבונן במקום הגיאומטרי של הנקודות X עבורן אורך הקטע XM קטן מהמרחק של X לישר AB, וגם מהמרחק של X לישר CD.
מה הנפח שלו?

13. המעגל החסום במשולש ABC משיק לצלעות AB, BC, AC בנקודות M, N, K בהתאמה.
הקטע KP הוא גובה של המשולש KMN.
התברר כי $\measuredangle CPA = 90°$. הוכיחו כי המשולש ABC הוא ישר זווית.

14. יש מעגל w ונקודות A, B. המשיקים מ-A, B למעגל נפגשים ב-C.
ישר שעובר דרך C חותך את w ב-X, Y ואת המעגל החוסם של ABC בנקודה Z.
הוכיחו כי Z אמצע XY.

15. נתון משולש שווה-צלעות ABC, עם מרכז O.
בוחרים נקודה D על הקטע BC, ואז בוחרים נקודה X על הקטע AD.
הישר BX חותך את AC ב-E, והישר CX חותך את AB ב-F.
נניח שבחרנו את X על AD כך שהשטח של המשולש DEF יהיה מקסימלי.
הוכיחו כי המרובע $BXOC$ חסום במעגל.

16. נתונים מעגלים $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$ עם מרכזים $O_1,\ O_2,\ O_3$ בהתאמה.
הנקודות A ו-B הן מפגשי המשיקים החיצוניים המשותפים של זוגות המעגלים $\omega_1,\ \omega_2$ ו- $\omega_1,\ \omega_3$ בהתאמה.
המשיקים מ-A ל- ω_2 משיקים לו בנקודות $T_1,\ T_2$. נסמן ב- $T'_1,\ T'_2$ את הנקודות הסימטריות להן על המעגל ω_2.
באותו האופן, נגדיר נקודות $S_1,\ S_2$ ו- $S'_1,\ S'_2$ (ביחס למשיקים מ-B ל- ω_3).
נתון כי $B,\ T'_1,\ T'_2$ על ישר אחד, וכן גם $A,\ S'_1,\ S'_2$.
נסמן את חיתוך הישרים $T'_1T'_2$, $S'_1S'_2$ ב-X,
ואת חיתוך הישרים AO_3, BO_2 ב-Y.
הוכיחו כי $O_1,\ X,\ Y$ על ישר אחד.

בתיאבון!