דורבנים בכל מיני צבעים 2

1. הוכיחו שקיים n גדול מ-1000 כך שסכום הספרות של 2^n גדול מסכום הספרות של 2^{n+1}.

2. האם קיים פולינום מתוקן $P(x)$ מדרגה גדולה מאפס כך ש$P(\frac{n}{2})$ שלם עבור כל מספר שלם n.

3. הוכיחו ש: $\sum_{k=3}^{n-3}\binom{k}{3}\binom{n-k}{3}=\sum_{k=2}^{n-4}\binom{k}{2}\binom{n-k}{4}$.

4. במדינה זרה יש 1993 ערים, לכל עיר יש לפחות 93 טיסות לערים אחרות, ובין כל שתי ערים אפשר להגיע לכל עיר אחרת (בעזרת רצף טיסות).
א. הוכיחו שאפשר לעבור בין כל שתי ערים ב-63 טיסות לכל היותר.
ב. האם ניתן להחליף את 63 במספר קטן יותר בשאלה?

5. א. נקודות M,L,K נמצאות על הצלעות AB,AC,BC בהתאמה של המשלוש ABC (אבל לא בקודקודים). הוכיחו כי המעגלים החוסמים של CKL,BKM,ALM נפגשים בנקודה אחת. (טענה זאת לפעמים נקראת משפט מיקל).
ב. נתונים 4 ישרים במישור, שנחתכים ב-6 נקודות שונות. הראו שהמעגלים החוסמים את 4 המשולשים, שנוצרים על ידי שלשות של הישרים הנתונים, נפגשים בנקודה אחת. (הנקודה הזאת נקראת נקודת מיקל).

6. לוח 6×6 חולק ל-12 צורות, כאשר כל צורה מורכבת מ-3 משבצות. מבין הצורות יש K פינות, והאחרות הן מלבנים. מצאו את כל הערכים האפשריים של K.