דורבנים בכל מיני צבעים

1. לדוד משה הייתה חווה, ובחווה היו 21 פרות, לכל פרה היה משקל, משה גילה שלא משנה איזו פרה אחת הוא לוקח לטיול הוא יכול לחלק את שאר הפרות לשני עדרים, עשר פרות בכל עדר, כך שהמשקל בכל עדר שווה. הוכיחו שלכל הפרות אותו משקל כאשר:
א. המשקל של כל פרה הוא שלם.
ב. המשקל של כל פרה הוא ממשי.

2. עבור איזה n שלם הפולינום $x^{17}+nx^{16}+3$ פריק בשלמים? (כלומר מכפלה של שני פולינומים עם מקדמים שלמים ודרגה גדולה מאפס).

3. בעיר מסוימת כל תושב מכיר לפחות 30 אחוז מהתושבים. תושב ילך לבחירות אם ורק אם הוא מכיר את אחד מהמועמדים. הוכיחו שניתן לערוך בחירות לרשות העיר שני מועמדים בלבד, כך שרוב התושבים יצביעו בבחירות.

4. קודקודים של גרף ממסופרים מ- 1 עד N, שני קודקודים מחוברים אם ורק אם ההפרש בין המספרים שלהם הוא ± 7 או ± 11. כמה רכיבי קשירות יש בגרף? (התשובה תלויה ב- N).

5. על המעגל החוסם של משולש ABC נבחרה נקודה P. עקבי האנכים מ- P לישרי צלעות המשולש הם M,L,K. הוכיחו כי M,L,K על ישר אחד. (הישר נקרא הישר של סימפסון).

6. לוח $(2a+1)\times(2b+1)$, כאשר a,b מספרים שלמים, מכוסה כמעט לגמרי על ידי דומינו: כל דומינו מכסה שתי משבצות, וכל משבצת חוץ מהפינה השמאלית העליונה מכוסה על ידי אבן דומינו אחת בדיוק. מותר לבצע פעולה כזו: אם צלע של משבצת ריקה מתלכדת עם הצלע הקצרה של אבן דומינו כלשהי, מותר להזיז את אבן הדומינו לאורך הצלע הארוכה, כך שהאבן תכסה את המשבצת הריקה, ותפנה משבצת אחרת. הוכיחו שבמהלכים כאלה ניתן להעביר את המשבצת הריקה לכל פינה אחרת.